



TITLE:

インパルス応答の測定とそのデータ処理に関する研究(
Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

兼田, 雅弘

CITATION:

兼田, 雅弘. インパルス応答の測定とそのデータ処理に関する研究. 京都大学, 1974, 工学博士

ISSUE DATE:

1974-11-25

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r2639>

RIGHT:

インパルス応答の測定と
そのデータ処理に関する研究

1973年
4月

兼田雅弘

目 次

第1章 序 論	1
§ 1.1 動特性測定とインパルス応答	1
§ 1.2 本論文の梗概	3
第2章 インパルス応答の測定法	6
§ 2.1 序	6
§ 2.2 零交叉波について	7
§ 2.3 相関法による線形系の動特性測定	9
§ 2.4 測定時のパラメータ決定	15
第3章 相関関数測定のための装置	21
§ 3.1 序	21
§ 3.2 2値信号の多出力可変遅延装置	21
§ 3.3 ランダム、ノイズ発生器	32
§ 3.4 本装置を用いた相関関数の測定	35
第4章 インパルス応答を用いた等価的2次系の伝達関数の推定	40
§ 4.1 序	40
§ 4.2 パルス伝達関数のパラメータとインパルス応答の関係	42
§ 4.3 最短左側インパルスによる方法 (MLIM)	44
§ 4.4 新しい推定法 (NM)	47
§ 4.5 改良した新しい推定法 (INM)	50
§ 4.6 推定機構としての良さの評価	53
§ 4.7 サンプリング周期と推定誤差	62
第5章 パラメータ推定における準最適重み	70
§ 5.1 序	70
§ 5.2 第1推定式が1次式の場合	71

§ 5.3	第1推定式が2次式の場合	75
§ 5.4	実際問題への定理の適用	79
第6章	連続系と等価的離散置系	84
§ 6.1	序	84
§ 6.2	連続系と離散置系におけるパラメータの関係	85
§ 6.3	連続系の評価規範と最適ゲイン	87
§ 6.4	離散値系の評価規範と最適ゲイン	94
§ 6.5	k_c と k_s との関係	99
§ 6.6	P.I. における重み w の決定	104
§ 6.7	いくつかの例題における計算例	110
§ 6.8	この評価規範によるMLIMとINMの比較	118
第7章	2次系と遅れ要素による近似	121
§ 7.1	序	121
§ 7.2	遅れのパラメータの決定	122
§ 7.3	2次系のパラメータの決定	126
§ 7.4	高次系の近似例	127
§ 7.5	遅れのある系の最適制御	131
§ 7.6	高次系の近似系としての良さの評価	134
結	言	143
謝	辞	146
付	録	147
参 考 文 献		157

第1章 序論

§1.1 動特性測定とインパルス応答

近年 通電制御系に関する研究が種々の方面から進められている。

5 制御系の環境などに大きな変動があり、これにともなって制御対象が時間と共に変動するパラメータを有し、その動特性が刻々変動するようなプロセスの制御を行なうためには、オン・ラインの動特性測定がどうしても必要になってくる。

10 線形系の動特性測定の技術は種々あるが、大別して周波数領域で伝達関数を求める方法と、時間領域で動特性を求める方法（その中でもインパルス応答を求める方法が多い）の2通りがある。

また、オフ・ラインの動特性測定には系の動作を大きくみださないので、
15 十分な精度の得られる相関関数を用いる相関法の技術が非常に有力であることが知られている。^{(1), (2), (3), (27), (28)}

20 これらの中でも特に、不規則信号を探索信号として用いる方法がよく使われている。この場合、最も簡単に得られる結果がインパルス応答である。不規則信号としては白色信号は理論的解析が明解になるが、完全な白色雑音と実現することは不可能であるので、白色雑音的な不規則信号を作る研究も種々行なわれている。^{(7), (18), (43)}
25 その中で特に、信号が実際に作り易く、相関関数を簡単に作ることが出来るなどの理由から、Huffman⁷⁾ によって見出されたM系列符号(maximum length sequence code)がよく用いられている。これを用いた動特性測定(特に、インパルス応答の測定)に関する研究は古田、伊沢ら^{(15), (17), (19)}を始めとして
30 数多く発表されている。^{(16), (20)} このM系列信号を用いれば、不規則信号ではないので、探索

信号の統計的ゆらぎによる結果のバラツキがないこと、M系列符号の発生機構を工夫すれば遅延装置すら省略出来て簡単に相関関数が測定出来るなどの特長があり、理論的には非常に有力な方法であるとされている。

しかし、一つには最大周期や、パルス間隔をいかに決定するかという問題がある。

また、一方、B. P. Keltman⁴⁾らによるM系列以外の極性相関を利用したインパルス応答の測定に関するものや、藤井、赤沢²¹⁾による平均応答法によるもの、さらには森下²²⁾による信号波形から適当にサンプリングしたデータを単に平均することによって相関関数を得る方法等²³⁾が発表されている。ところで、M系列などの探索信号と制御系に外部から加えられる方法は、これは実際に使用するとなると、系に余分な信号を入れなければならないという現場の技術者の要求が強いため使用対象が限定されているようである。そのような場合には、系の内部で発生する雑音を利用して動特性を測定する方法が必要になる。

本論文の前半(3章まで)はこのような立場から、系にもともとある雑音を探索信号に使える可能性もある極性相関によるインパルス応答の測定原理とそれを実現するための装置についての研究である。^{22), 23), 35), 36)}

ところで、インパルス応答がこのようにして実際に得られても、それは関数形として得られるのではなくて、いくつかのサンプル値が数値的に与えられるだけである。したがって、これを直接用いて制御することは困難な場合が多いので何らかの意味で(広い意味でのパターン認識の問題として)、そのデータ処理が必要になる。この方面の研究はいかに少ないようである。²⁰⁾

これには従来、系のパルス伝達関数を仮定して、そのパラメータを線形回帰モデルとして、最小二乗法により求める方法が R. E. Kalman⁶⁾によって提唱されてから、

^{24), 25), 26)}
鈴木らによる最小二乗法による線形プロセスの動特性推定に関する研究がいくつか発表されている。また、これからいくつかの方法の比較を行なった茅ら^{29), 30)}の研究もある。

5 本論文の後半(4章以後)では、系のパルス伝達関数を二次系で近似し、
そのパラメータを推定する新しい方法を提案している。^{37)~41)}この方法は最小二乗法ほどは
数学的意味は明確ではないがデータ処理がはるかに簡単であるのでオン・ライン動特性
測定に適している。さらに、この方法はノイズに対しても強いという利点をもっている。
10 また、二次系で近似すると無理が生じるような高次系や、遅れの大きい系に対しても
適用出来るように系のパルス伝達関数を(二次系)+(遅れ要素)で近似した場合に
ついて考察した。このような方法は化学プロセスなどでよく遭遇する高次の系を近似
15 するのにしばしば使われ、有効であることが知られている。^{50)~53)}

§1.2 本論文の梗概

20 本論文では、適応制御系に適用することを主な目的として、動特性の測定法、およ
び、それにもとづくデータ処理法について議論した。すなわち、線形制御系の
オン・ライン動特性測定に関しては特に、極性相関法⁴⁾によるインパルス応答の測定
における誤差に関して検討した。また、そのインパルス応答を実際に測定する目
25 的で二値信号を利用した簡易型相関関数測定装置を設計、試作した。

さらに、それらの方法により得られたインパルス応答をもとにして、系の伝達関数
を *closed form* で求めるためのデータ処理に関する研究を行なった。

30 本論文はこれらの研究をまとめたもので、以下にそれぞれ各部分についての
あらましを述べる。

第2章では、極性相関法によるインパルス応答の測定原理と、そのときの誤差に関する検討、および、探索信号について述べ、さらに、遅延時間の適当な分割幅、必要なデータの長さ等の測定時のパラメータ決定の目安について述べている。³²⁾

第3章では、極性相関の測定に必要な機器の構成、および、その試作結果について述べている。それには2値信号の可変遅延装置が必要であるがその記憶媒体としては低価格で容量の大きな磁歪遅延線を使った。この試作装置の特長は、インパルス応答の測定に便利なおよび一本の磁歪遅延線でサンプリングのタイミングと工夫することにより、遅延時間の異なる複数の遅延出力が同時に得られるように工夫したものである。

また、探索信号用として、ランダム・テレグラフ・ノイズ発生器を試作した。これは、ノイズ源としては Zener Diode から出る物理雑音を用いているが、得られる2値雑音の統計的性質を改善するために、対称形 Flip-Flop を利用している。

そして、これらの装置を用いて、測定対象はアナコンで模擬し、第2章で述べた測定条件を用いて実験を行ないその有効性を確かめた。

第4章では、制御対象のパルス伝達関数を2次系で近似し、そのパラメータとインパルス応答の測定値より推定する方法について述べている。^{37)~39)} ここで、

インパルス応答のサンプル値に重畳するノイズに注目したとき、最小2乗法によるパラメータ推定法が、そのパラメータを出来るだけ正確に推定するという意味では必ずしも最適とはいえないことを明らかにした。そして、最小2乗法にかわるものとして新しい推定法を提案し、最小2乗法との推定機構としての良士の比較を行なった。この方法は最小2乗法ほどは数学的意味は明確ではないがデータ処理が簡単で、

1) もノイズに対してもかなり強いという特徴をもっている。

第5章では、4章で提案した方法で使われているパラメータ推定における
重み付平均の重みの持つ数学的意味についで、少し一般的に論じたものである。¹⁰⁾

第6章では、実際の系は連続系であるが、測定が離散的であるため、
推定によって得られた結果は等価的離散値系のパルス伝達関数であるという
Continuous-Discrete System の問題を非常に簡単な一例について論
じた。動特性推定問題は本来、単に推定値が真値にどれほど近いのか
というよりも、それによって得られた情報により、どれほどよりよい制御性能が
得られるかという制御の問題まで含めて議論する必要がある、それによる比較を
行なった。そして、その結果はパラメータのみによる比較とほぼ一致することも述べている。

第7章では、高次系とか遅れの大きい系にも4章で提案した新しい推定法
が適用できるように、系のパルス伝達関数を(2次系)+(遅れ要素)で近似
した場合について検討した。

第2章 インパルス応答の測定法

§2.1 序

自動制御系においてはプロセスを制御する場合、そのプロセスの動特性を知って
なければそれを制御することは出来ない。したがって動特性を知るための手続
5 が必要である。これをアイデンティフィケーション(同定)と呼んでいる。特に最近の適応
制御系においてはこのアイデンティフィケーションは、系が動作状態にある場合の
動特性を知る必要がある。

これを実現する方法としては、相関関数を用いる相関法の技術が非常に有力
10 である。^{1), 2), 3), 27), 28)}

これらの中でも特に、不規則信号を探索信号として用いる方法がよく用いられて
いる。ところで相関法によれば相関関数を求める操作が必ず必要となるわけ
あるが、従来のアナログ量で取扱う相関関数の測定では、アナログ量の遅延装置
15 や掛算器の製作が非常に複雑、あるいは困難であり、また、データ処理が膨大
なものになる。

そこで最近このアナログ信号を、±1の2値信号に変換して相関を取る方法、
20 いわゆる“極性相関”の名で呼ばれる方法がいくつか提案²⁹⁾されている。
本章もこれに関するものである。

アナログ信号を±1の2値信号に変換して相関を取れば遅延装置も2値の遅延
装置でよい、掛算器もリレーで行なうことが出来、また、データ処理も非常に簡単
25 であるが、情報がそれだけ少なくなっているので当然誤差が生ずると考えらる。

そこでその誤差がどの程度のものであるか、また、探索信号の選り方、相関の取り
方等を考えれば、その誤差をどの程度少くすることが出来るか等を検討している。

なお、このような2値の不規則信号を用いて、プロセスのインパルス応答を求める
30 方法として、シフトレジスターを用いたM系列擬定乱ラジ、ノイズによる方法

が提案されている。^{(15)~(20)}

これは、特に遅延装置を必要としないこと、確定的信号であるため、入力の不規則性による推定値のバラツキがないことなどいくつかの長所があるが、ここでは
5 制御系自身に内在する不規則信号を探索信号として用い、特に探索信号を用いないような場合の適用も考えているので問題が少し異なっている。

10 §2.2 零交叉波について

任意のランダムプロセス $x(t)$ というものを考え、これを *infinite clip* して、
あるいはリレーに通して得られるような2値信号 $s(t)$ を零交叉波と呼んでいる。^{(2)~(12)}

15 この章で考えている零交叉波 $x(t)$ は、定常確率過程であるとしている。この零交叉波の中で特に零点の分布がポアソン分布に従うような信号を *random telegraph noise* と呼んでいる。⁽¹⁴⁾ この信号で表われる物理的なプロセスとしてはショットノイズがある。^{(13), (14)}

20 実際のランダム・プロセスは普通厳密には、この信号では表わされないものであるが、物理的に考えて、それほど妥当性を失わないことと、数学的取扱いが非常に楽であることからしばしば実際のプロセスがこの信号で表わされると仮定しているようである。

25 以下この *random telegraph noise* ^{(2)~(14), (44)} について考える。

次式で与えられるような $x(t)$ を考える。

$$\begin{cases} x(t) = a & \text{if } \xi(t) \geq 0 \\ x(t) = -a & \text{if } \xi(t) < 0 \end{cases}, \quad (a > 0) \quad (2-1)$$

30 $x(t)$ の零点はポアソン分布に従うと仮定しているので、その零点間の間隔は指数分布に従い、また単位時間内に落ちる零点の個数を α とすると、時間間隔 $(0, T)$

間にある個数 \$k\$ の確率は周知のように次式で与えられる。

$$P(k) = \frac{(\alpha T)^k}{k!} \cdot \exp(-\alpha T) \quad (2-2)$$

次に積 $x(t) \cdot x(t+\tau)$ の平均値、即ち、 $x(t)$ の自己相関関数を求めると、

$$E[x(t) \cdot x(t+\tau)] = a^2 \cdot \exp(-2\alpha|\tau|) \quad (2-3)$$

又、このパワー・スペクトラムは、

$$S_{xx}(j\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4a^2\alpha}{\omega^2 + 4\alpha^2} \quad (2-4)$$

ところで random Telegraph noise にはもう一つの型がある。それは時間をある小さな値 h で分割し、そのそれぞれの区間の値を他の区間の値とは独立に $+a, -a$ の値を等確率でランダムに与えたような関数 $x(t)$ がそれである。

この $x(t)$ の自己相関関数と、そのパワー・スペクトラムは次式で与えられる。

$$R_{xx}(\tau) = a^2(1 - \tau/h) \quad (0 \leq \tau \leq h) \quad (2-5)$$

$$S_{xx}(j\omega) = \frac{h}{\pi} \cdot \left\{ \frac{a \cdot \sin(\pi f h)}{\pi f h} \right\}^2 \quad (1 \leq h, 2\pi f = \omega) \quad (2-6)$$

ここで (2-4) 式と (2-6) 式を比較するため、 $a = 1/h$ とおくと (2-4) 式は次のように書き直すことが出来る。

$$S_{xx}(j\omega) = \frac{h}{\pi} \cdot a^2 \cdot \left\{ 1 - (\pi f h)^2 + (\pi f h)^4 - (\pi f h)^6 + \dots \right\} \quad (2-4')$$

又 (2-6) 式は、

$$S_{xx}(j\omega) = \frac{h}{\pi} \cdot a^2 \cdot \left\{ 1 - \frac{2}{3}(\pi f h)^2 + \frac{23}{45}(\pi f h)^4 - \frac{44}{105}(\pi f h)^6 + \dots \right\} \quad (2-6')$$

これからわかるように、(2-6)式で与えられる $S_{xx}(j\omega)$ は $\alpha = 1/A$ と取くと、(2-4)式で与えられる $S_{xx}(j\omega)$ とほぼ同じような性質をもっていることがわかる。

次に零交叉波のものの代表例として、正規性雑音を *infinite clip* したものを考える。 $\xi(t)$ を正規性確率過程とし、その正規自己相関関数を $\rho(\tau)$ とする。又 $\xi(t)$ を *infinite clip* したものを $x(t)$ とする。

$$\begin{cases} x(t) = 1 & \text{if } \xi(t) \geq 0 \\ x(t) = -1 & \text{if } \xi(t) < 0 \end{cases} \quad (2-7)$$

この $x(t)$ の自己相関関数は、

$$R(\tau) = \frac{2}{\pi} \cdot \sin^{-1} \rho(\tau) \quad (2-8)$$

この結果は、arcsine law⁴⁵⁾ として知られている。

§2.3 相関法による線形系の動特性の測定について。

〔3-1〕 正規性雑音を探索信号として用いた場合。

図(2-1)において、未知のプロセス $G(s)$ の周波数伝達関数 $G(j\omega)$

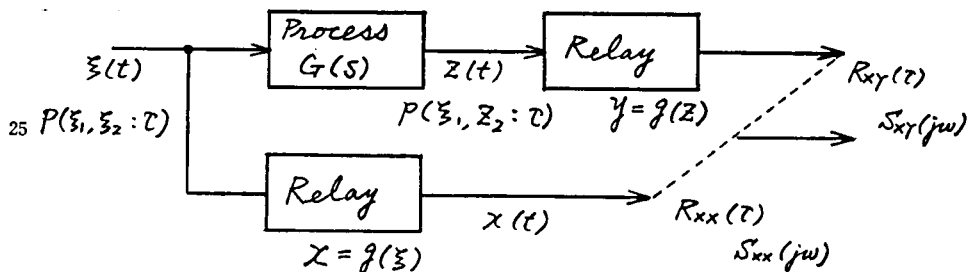


図 2-1. 正規性雑音を探索信号に用いる場合。

を知ろうとする時、相関法による場合は次のような手順をとる。先ず探索信号 $\xi(t)$ の

自己相関関数 $R_{zz}(T)$, 及び $z(t)$ とプロセス $G(s)$ の出力 $x(t)$ との相互相関関数 $R_{zx}(T)$ を求め、次にこれらのフーリエ変換をとって、パワー・スペクトラム $S_{zz}(j\omega)$, $S_{zx}(j\omega)$ を作る。この $S_{zz}(j\omega)$ と $S_{zx}(j\omega)$ より、次のよく知られた関係式から $G(j\omega)$ を得ることは出来る。

$$G(j\omega) = S_{zx}(j\omega) / S_{zz}(j\omega) \quad (2-9)$$

この方法では、理論的には推定誤差は出ないけれども、相関関数 $R_{zz}(T)$, $R_{zx}(T)$ を実際に求めることが非常に難しい仕事であること、又理想計算器を必要とすること等より、実用的な方法ではない。そこで次のような方法を考える。先ず $z(t)$ と $x(t)$ をそれぞれリレーに通して 2 値信号の零交叉波 $x(t)$, $y(t)$ を得る。そこでこの $x(t)$, $y(t)$ を用いて相関関数 $R_{xx}(T)$, $R_{xy}(T)$ を求め、これらをフーリエ変換して $S_{xx}(j\omega)$, $S_{xy}(j\omega)$ を作る。次にこの $S_{xx}(j\omega)$, $S_{xy}(j\omega)$ を用いて (2-9) 式にならって、次式を得る。

$$\hat{G}(j\omega) = S_{xy}(j\omega) / S_{xx}(j\omega) \quad (2-10)$$

こうして得られた $\hat{G}(j\omega)$ は、 $G(j\omega)$ と同じような性質をもっていることはわかるので、この $\hat{G}(j\omega)$ をもって、 $G(j\omega)$ を推定しようという方法である。

(極性相関の名で呼ばれる相関法がいくつか提案^{(15)~(17), (19), (20), (23)}されているが、このように $z(t)$ も $x(t)$ も

両方とも 2 値信号に変換してしまう方法は提案されていない。) しかし、 $\hat{G}(j\omega)$ は非線形要素のリレーを通して得られたものであるから、厳密には $G(j\omega)$ とは異なるものであろうと思われる。そこで以下に $G(j\omega)$ を $\hat{G}(j\omega)$ で推定した場合の誤差について検討している。

今、探索信号 $z(t)$ を平均値 0 の定常正規性確率過程の一標本関数であるとする、 $z(t)$ の確率密度関数は次のように表わされる。

$$P(\xi_1, \xi_2; \tau) = \frac{1}{2\pi \sigma_1^2 \sqrt{1-\rho_1^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\rho_1(\tau) \xi_1 \xi_2}{2\sigma_1^2 (1-\rho_1^2)}\right\} \quad (2-11)$$

次に伝達関数 $G(j\omega)$ が線形であるので、 $z(t)$ も又平均値 0 の定常正規性確率過程の一標本関数になる。そこで $z(t)$ と $z(t+\tau)$ との同時確率密度関数は次のように表わされる。

$$P(\xi_1, \xi_2; \tau) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho_2^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_2^2)} \left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2} - 2\rho_2 \frac{\xi_1 \xi_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} \quad (2-12)$$

但し、 σ_2^2 は $z(t)$ の分散、 $\rho_2(\tau)$ は $z(t)$ と $z(t+\tau)$ の正規相互相関関数であって、こゝらは $z(t)$ の σ_1 , ρ_1 と $G(j\omega)$ が与えられればすぐに求めるものである。この (2-11), (2-12) 式を用い非線形要素のフーリエ変換法により、 $R_{xx}(\tau)$, $R_{xy}(\tau)$ を求める。

$$R_{xx}(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot P(x_1, x_2; \tau) dx_1 \cdot dx_2 \quad (2-13)$$

ところで、 $x_1 = x(t) = g(\xi_1)$, $x_2 = x(t+\tau) = g(\xi_2)$ であるから、

$$R_{xx}(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1) \cdot g(\xi_2) \cdot P(\xi_1, \xi_2; \tau) d\xi_1 \cdot d\xi_2$$

$g(\xi)$ のフーリエ変換をとって

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{(2\pi j)^2} \cdot \int_C f(w_1) dw_1 \cdot \int_C f(w_2) dw_2 \times \iint_{-\infty}^{\infty} P(\xi_1, \xi_2; \tau) \cdot \exp(w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2) d\xi_1 \cdot d\xi_2 \quad (2-14)$$

このように変換すると (2-14) 式の右辺はすべて求めるものであるから、計算出来て、

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_1^k(\tau)}{k!} \cdot \frac{2^{k+2} \cdot \Gamma^2(k/2)}{\pi^2} \quad (k: \text{odd}) \quad (2-15)$$

同様にして、

$$R_{zy}(\tau) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k: \text{odd})}}^{\infty} \frac{\beta_2^k(\tau)}{k!} \cdot \frac{2^{k+2} \cdot \Gamma^2(k/2)}{\pi^2} \quad (2-16)$$

5 これらそれぞれをフーリエ変換して $S_{xx}(j\omega)$, $S_{xy}(j\omega)$ を求める。

$$S_{xx}(j\omega) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k: \text{odd})}}^{\infty} \frac{k S_1(j\omega)}{k!} \cdot \frac{2^{k+2} \cdot \Gamma^2(k/2)}{\pi^2} \quad (2-17)$$

$$10 \quad S_{xy}(j\omega) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k: \text{odd})}}^{\infty} \frac{k S_2(j\omega)}{k!} \cdot \frac{2^{k+2} \cdot \Gamma^2(k/2)}{\pi^2} \quad (2-18)$$

但し、

$$k S_i(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_i^k \cdot \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (i=1,2)$$

15 (2-16), (2-17), (2-18) 式より $\hat{G}(j\omega)$ を求める。

$$\hat{G}(j\omega) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k: \text{odd})}}^{\infty} \frac{k S_2(j\omega)}{k!} \cdot \frac{2^{k+2} \cdot \Gamma^2(k/2)}{\pi^2} \bigg/ \sum_{\substack{k=1 \\ (k: \text{odd})}}^{\infty} \frac{k S_1(j\omega)}{k!} \cdot \frac{2^{k+2} \cdot \Gamma^2(k/2)}{\pi^2} \quad (2-19)$$

上式の分母・分子の第1項だけを考えそのを $\hat{G}_1(j\omega)$ とすると。

$$20 \quad \hat{G}_1(j\omega) = k S_2(j\omega) / k S_1(j\omega) = (\sigma_1/\sigma_2) \cdot G(j\omega) = K \cdot G(j\omega) \quad (2-20)$$

この式より $\hat{G}_1(j\omega)$ は $G(j\omega)$ の定数 (σ_1/σ_2) 倍になっていることがわかる。しかし、

25 分母・分子の第2項以後が推定誤差の原因となる。

分母・分子の第2項の係数 β_k は

$$\beta_k = 2\pi \left\{ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (k-2) \right\}^2 / k! \quad \begin{matrix} (\text{for } k \geq 3) \\ (k: \text{odd}) \end{matrix}$$

$$30 \quad \beta_1 = 2\pi \quad (2-21)$$

さらに又、 $k S_2(j\omega)$, $k S_1(j\omega)$ は K の増加とともに減少していくので $\beta_1(\tau)$ を用い

選べば「即ち、 $z(t)$ を適当に選べば」 $\hat{G}(j\omega)$ で $G(j\omega)$ を近似的に推定することが出来る。

$\rho_r(\tau)$ の形が $\tau=0$ の点で δ 関数に近い程推定誤差は小さいようである。

- 5 δ 関数の場合は $z(t)$ が白色雑音の場合になる。従って $z(t)$ としては出来るだけ相関の少ないものを選ぶ必要がある。

- 10 [3-2] 探索信号として random telegraph noise を用いる場合。

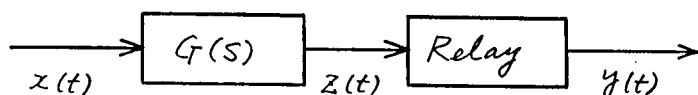


図 2-2. Relay の影響

15 先ず最初に図 2-2. について考える。

$G(s)$ が線形であれば次の良く知られた関係式が成り立つ。

$$S_{zz}(j\omega) = |G(j\omega)|^2 S_{xx}(j\omega) = G(j\omega) \cdot G^*(j\omega) \cdot S_{xx}(j\omega) \quad (2-22)$$

さて、 $x(t)$ が定常正規性確率過程の一標本関数であって、 $G(j\omega)$ が線形であれば、 $z(t)$ も又定常正規性確率過程の一標本関数になるので、平均値が0であると仮定すると、 $z(t)$ の確率密度関数は次式で与えられる。

$$p(z_1, z_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2(\tau)}} \cdot \exp\left\{-\frac{z_1^2 + z_2^2 - 2\rho(\tau)z_1 \cdot z_2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\} \quad (2-23)$$

次に $z(t)$ と $y(t)$ の相互相関関数を求めると、

$$R_{zy}(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} z_1 \cdot y_2 \cdot p(z_1, z_2; \tau) dz_1 \cdot dy_2$$

これを、 $y_2 = y(t+\tau) = \text{sgn}(z_2)$ であることと考慮して変形し、さらに $p(z_1, z_2; \tau)$

とて、(2-23)式を代入して計算すると

$$R_{zy}(\tau) = \frac{2\sigma p(\tau)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot R_{zz}(\tau) \quad (2-24)$$

これをフーリエ変換して

$$S_{zy}(j\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot S_{zz}(j\omega) \quad (2-25)$$

次に $x(t)$ と $y(t)$ の相互相関関数 $R_{zy}(\tau)$ を求める。これは直接求めることは困難なので、 $R_{zy}(\tau)$ を仲介として求める。

$$\begin{aligned} R_{zy}(\tau) &= E[z(t) \cdot y(t+\tau)] \\ &= E\left[\int_0^\infty h(\lambda) \cdot x(t-\lambda) d\lambda \cdot y(t+\tau)\right] \\ &= \int_0^\infty h(\lambda) \cdot R_{zy}(\lambda+\tau) d\lambda \end{aligned}$$

上式をフーリエ変換して

$$\begin{aligned} S_{zy}(j\omega) &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^\infty \exp(-j\omega\tau) d\tau \cdot \int_0^\infty h(\lambda) \cdot R_{zy}(\lambda+\tau) d\lambda \\ &= \pi \cdot G^*(j\omega) \cdot S_{zy}(j\omega) \end{aligned} \quad (2-26)$$

(2-22), (2-25), (2-26)式より,

$$G(j\omega) = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \pi \cdot \sigma}{2} \cdot \left\{ S_{zy}(j\omega) / S_{xx}(j\omega) \right\} \quad (2-27)$$

次に図2-3. において、 $x(t)$ が random telegraph noise の場合を考える。

$G(j\omega)$ が低域濾波特性を持つ線形系の場合 $x(t)$ の平均反転時間 $1/\alpha$ が系の等価時定数 Ta に比べて非常に小さい場合は、中心極限定理により系の出力 $z(t)$ は正規性推率過程になることがわかっている。

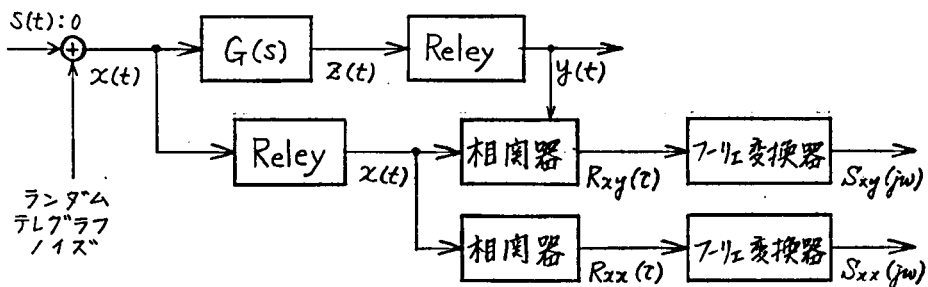


図 2-3. random telegraph noise を探索信号に用いる場合.

ところで (2-27) 式は, $z(t)$ が正規性確率過程であって, $G(j\omega)$ が線形であり, さえすれば成立する式であるから, 図 2-3. の場合にも又成立する. 従って

$$\hat{G}(j\omega) = S_{xy}(j\omega) / S_{xx}(j\omega) \quad (2-28)$$

で得られる $\hat{G}(j\omega)$ であって $G(j\omega)$ を推定する場合, パワー・スペクトラムに関するかぎり, ゲイン以外のすべての情報は失われないことがわかる.

このことから定常ゲインは他の何らかの方法で測定すれば $\hat{G}(j\omega)$ であって, $G(j\omega)$ を完全に知ることが出来る. 但し これは $G(j\omega)$ が低域通過特性をもち, $x(t)$ の平均反転時間 $1/\alpha$ が系の等価時定数 T_a に比べ非常に小さい場合 (少なくとも 10 分の 1 以下) に限る.

§2.4 測定時のパラメータ決定

実際に相関関数を次のような式に従って求める場合, データの長さ T や, 最大遅延時間

では無限大には出来ず, 必ずある値で打ち切ることになるがその場合 打ち切りによる

誤差をある値以下にするためには, どのくらいの値に選べばよいかということ, 又遅延時間

の分割幅 Δt をどの程度まで小さくすれば十分であるか等の目安について検討している。

[4-1] 遅延時間の分割幅 Δt について

普通 Δt の大きさの目安はサンプリング定理によっている。即ち信号 $x(t)$ に含まれる最大周波数を f_c/s とすると、 $\Delta t = 1/2f$ に選べばよいことが知られている。

しかし、実際にはこの f の値はわからない場合が多い。そこで次のような方法を考える。

一般に $G(j\omega)$ は低域通過特性を持つものを考えているので等価的に一次系

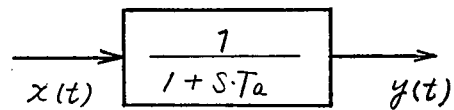


図 2-4. 一次系

と考え、 $G(j\omega) = 1/(1 + j\omega Ta)$ と仮定する。

(図 2-4. 参照)。又、 $x(t)$ はオズ節で取り扱った random Telegraph noise を考えると、 $G(j\omega)$ の出力 $y(t)$ の正規パワー・スペクトラムは

$$S_{yy}(j\omega) = \frac{4\alpha \cdot (1 + 2\alpha Ta)}{\pi \cdot (1 + \omega^2 Ta^2)(4\alpha^2 + \omega^2)} \quad (2-29)$$

但し $1/\alpha$ は random Telegraph noise の平均反転時間、図 2-5. におり、 ω_0 より大きな角周波数成分の $S_{yy}(j\omega)$ に及ぼす影響を検討するため、

次のような $\delta(\omega_0)$ を考える。

$$\begin{aligned} \delta(\omega_0) &= \int_0^\infty S_{yy}(j\omega) d\omega - \int_0^{\omega_0} S_{yy}(j\omega) d\omega \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 - 2\alpha Ta} \end{aligned}$$

$$\times \left\{ -2\alpha Ta \cdot \tan^{-1} \omega_0 Ta + \tan^{-1} \omega_0 / 2\alpha \right\}$$

(2-30)

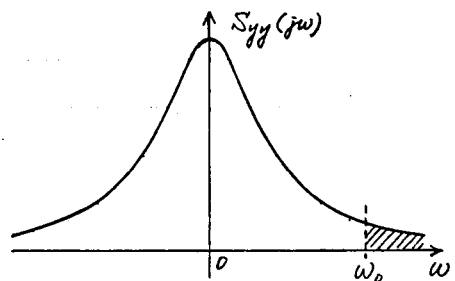


図 2-5. ω_0 以上の角周波数成分の影響

この式は $\alpha \cdot Ta$ の関数になっているが実際的な場合と考えて、

○ $\alpha \cdot T_a = 20$ とすると, ($1/\alpha$ が T_a の $1/10$ 以下なら $x(t)$ が $G(j\omega)$ と通った出力 $z(t)$ が十分正規性確率過程と見なせる) $\delta(\omega_0) \leq 0.01$ とするためには,

$$\Delta\tau = 1/2f_0 = \pi/\omega_0 \leq 1/8 \cdot T_a \quad (2-31)$$

○ $\alpha \cdot T_a = 10$ の場合, 同じく $\delta(\omega_0) \leq 0.01$ に対して

$$\Delta\tau \leq 1/5.5 \cdot T_a \quad (2-31)'$$

○ $\alpha \cdot T_a = \infty$ の場合, 即ち $x(t)$ が白色雑音の場合, 同じく, $\delta(\omega_0) \leq 0.01$ に対して,

$$\Delta\tau \leq 1/20 \cdot T_a \quad (2-31)''$$

従って実際には, $\Delta\tau = 1/10 \cdot T_a$ ぐらいに選んでおけばよい。

15 [4-2] 最大遅延時間 τ_m について

図 2-4. において, $x(t)$, $y(t)$ の相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ は

$$R_{xy}(\tau) = \frac{4\alpha T_a}{4\alpha^2 T_a^2 - 1} \cdot \exp(-\tau/T_a) - \frac{1}{2\alpha T_a - 1} \cdot \exp(-2\alpha\tau) \quad (\tau \geq 0)$$

$$= \frac{1}{2\alpha T_a + 1} \cdot \exp(2\alpha\tau) \quad (\tau < 0) \quad (2-32)$$

[4-1] における $\Delta\tau$ の目安を求めたのと同じように, 図 2-6. において $|\tau_m|$

より大きい $|\tau|$ の $R_{xy}(\tau)$ におよぼす影響を検討するため次の $\varepsilon(\tau_m)$ を考える。

$$\varepsilon(\tau_m) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) d\tau - \int_{-\tau_m}^{\tau_m} R_{xy}(\tau) d\tau \right\} / \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) d\tau \quad (2-33)$$

(2-32) 式を代入して

$$\varepsilon(\tau_m) = \frac{4\alpha T_a \{ T_a \cdot \exp(-\tau_m/T_a) - (1/2\alpha) \cdot \exp(-2\alpha\tau_m) \}}{4\alpha T_a^2 - 1/\alpha} \quad (2-34)$$

$\alpha \cdot T_a \gg 1$ と考えると

$$\varepsilon(\tau_m) = \exp(-\tau_m/T_a)$$

(2-34)'

$\varepsilon(\tau_m) \leq 0.01$ になるためには

$$\tau_m \geq 5 \cdot T_a$$

(2-35)

$\varepsilon(\tau_m) \leq 0.001$ になるためには

$$\tau_m \geq 7 \cdot T_a$$

(2-35)'

でよいことがわかる。

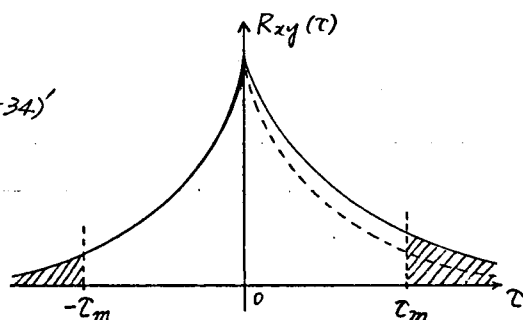


図 2-6. τ_m 以上の成分の影響

[4-3] データの長さ T について

図 2-2. においてデータの長さ T を決定する場合、 $R_{xy}(\tau)$ について考えなければ

ならないのであるが、[3-2] 節で検討したこと即ち (2-24) 式、(2-26) 式等

から、 $R_{xy}(\tau)$ の代りに $R_{zz}(\tau)$ について考えてよいことが分るので以下 $R_{zz}(\tau)$ について考える。

今 $z(t)$ が random Telegraph noise であって $G(j\omega)$ が低域通過特性をもっていて、 $z(t)$ が正現性確率過程の一標本関数であると考えられる場合について以下検討する。

次の式で表わされる $\overline{\varepsilon}_{zz}(\tau)$ は集合 $\{z(t)\}$ から取り出さる一標本関数 $z(t)$ に依存するので $\overline{\varepsilon}_{zz}(\tau)$ も又確率過程である。

$$\overline{\varepsilon}_{zz}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T z(t) \cdot z(t+\tau) dt \quad (2-36)$$

$$\begin{aligned}
 E[\Phi_{zz}(\tau)] &= \frac{1}{T} \int_0^T E[Z(t) \cdot Z(t+\tau)] dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T R_{zz}(\tau) dt = R_{zz}(\tau)
 \end{aligned} \tag{2-37}$$

5 正規化した $\Phi_{zz}(\tau)$ の $R_{zz}(\tau)$ の周りの分散を考える。

$$\varepsilon^2(\tau) = E\left[\left\{\frac{\Phi_{zz}(\tau)}{R_{zz}(0)} - \frac{R_{zz}(\tau)}{R_{zz}(0)}\right\}^2\right]$$

10 $Z(t)$ が正規性確率過程であることと考えると、上式は次のように表わされる。

$$\varepsilon^2(\tau) = \frac{2}{R_{zz}^2(0) \cdot T} \int_0^T (1 - \frac{t}{T}) \cdot [R_{zz}^2(t) + R_{zz}(t+\tau) \cdot R_{zz}(-t+\tau)] dt \tag{2-38}$$

さらに $R_{zz}(\tau)$ はこの場合次のように表わせるので、

$$R_{zz}(\tau) = \frac{\alpha^2}{4\alpha^2 T_a^2 - 1} \cdot \{2\alpha T_a \cdot \exp(-|\tau|/T_a) - \exp(-2\alpha|\tau|)\} \tag{2-39}$$

(2-39)式と(2-38)式に代入して、 $T \gg T_a$ 、 $T > \tau$ 、 $2\alpha T_a \gg 1$ と考え整理すると、

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^2(\tau) &= \frac{1}{(2\alpha T_a + 1)^2} \cdot \left(\frac{4\alpha^2 T_a^3}{T} - \frac{8\alpha T_a^2}{T(2\alpha T_a + 1)} + \frac{1}{2\alpha T} \right) \\
 &\quad - \frac{4\alpha T_a^2}{T(2\alpha T_a + 1)^2(2\alpha T_a - 1)} \cdot \{ \exp(-2\tau/T_a) + \exp(-4\alpha\tau) \}
 \end{aligned} \tag{2-40}$$

25 いま、 $\alpha T_a = 10$ 、 $\exp(-4\alpha\tau) \ll \exp(-2\tau/T_a)$ と置くと、

$$\varepsilon^2(\tau) = \frac{0.90 T_a}{T} - \frac{T_a}{200 T} \cdot \exp(-2\tau/T_a) \tag{2-40'}$$

$\varepsilon^2(\tau)$ の最大値を $\varepsilon_{\max}^2(\tau)$ とおくと、

30 $\varepsilon_{\max}^2(\tau) \leq 0.01$ にするためには、

$$T \geq 90 \cdot T_a \tag{2-41}$$

又, $\alpha T_a = 20$ といった場合は同じく $\varepsilon_{\max}^2(\tau) \leq 0.01$ に対して,

$$T \geq 95 \cdot T_a$$

(2-41)'

なお, $x(t)$ が白色雑音の場合については, 榎木³¹⁾ 他がデータ長の T の目安として同じ
5 評価に対して求めており, $T \geq 200 T_a$ である。

10

15

20

25

30

第3章 相関関数測定のための装置

§3-1 序

適応制御系においては、系の動特性をオンラインで測定する必要がある。それには、
5 相関法が有効である。²⁸⁾ 相関関数を求める方法は種々提案されているが、遅延要素
を用いる方法は最も直接的である。アナログ遅延要素としては、磁気テープ、コンデンサ、
磁心などが考えられるが、いずれにしても、記憶すべき情報量が多いので高価な
10 ものになる。

ところで、相関関数を求めるには、一方の信号を2値信号に変換してもあまり大きな
誤差は出ないことが知られており、また特に、Gauss過程では一方を2値信
15 号にしても正しい相関関数の得られることが分かっている。^{33), 43), 44)}

しかるに、2値信号であれば相関関数の計算に必要な遅延装置は、アナログ
信号に対するそれと比べて非常に簡単かつ、信頼性の高いものが作れるはずである。
本章では、このような観点から2値信号の遅延装置を試作し、また、探索信号用
20 のランダムノイズ発生器(coin tossing type の random telegraph
noise を発生する装置)⁴³⁾を試作して、Analog Computerと組合わせていく
つきの相関関数の測定を行なった。³⁶⁾

§3-2 2値信号の多出力可変遅延装置

3-2-1 2値信号による相関関数の測定原理

30 2変数 x, y の共分散は図3-1.(a)で測定できるが、これを同図(b)のように、

一方の信号を2値信号に変換した場合、結果がどうなるかを一般的な場合について議論するのは困難であるので、 x, y が2次元の

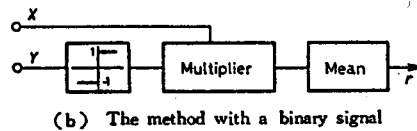
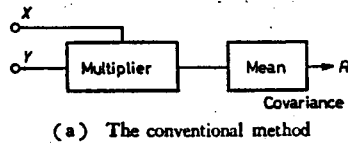


図3-1. 2変数 x, y の共分散の測定

Gauss分布に従う場合について考える。⁽³³⁾

まず記号を次のように定める。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_x^2, \sigma_y^2 & : \text{それぞれ } x, y \text{ の分散} \\ R & : x, y \text{ の共分散} \\ \rho & : x, y \text{ の相関係数} \\ f(x, y) & : x, y \text{ の同時確率密度関数} \end{array} \right.$$

図3-1. (b) の出力 r は、

$$r = \int_0^{\infty} dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x \cdot f(x, y) - \int_{-\infty}^0 dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x \cdot f(x, y) \quad (3-1)$$

で与えられるが、 $f(x, y)$ が対称であると仮定すると、

$$\Gamma = 2 \cdot \int_0^{\infty} dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x \cdot f(x, y) \quad (3-2)$$

となる。いま、 x, y が2次元の Gauss 分布に従うと仮定したので、

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x/\sigma_x)^2 - 2\rho xy/(\sigma_x\sigma_y) + (y/\sigma_y)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \quad (3-3)$$

であるから、(3-2)式に代入すると、

$$\Gamma = \frac{2}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \int_0^{\infty} dy \cdot \exp(-y^2/2\sigma_y^2) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x \cdot \exp\left\{-\frac{(x/\sigma_x - \rho y/\sigma_y)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \quad (3-4)$$

積分を実行して、

$$\Gamma = \sqrt{2/\pi} \cdot \sigma_x \cdot \rho = \sqrt{2/\pi} \cdot R/\sigma_y \quad (3-4)'$$

となる。すなわち、 σ_x, σ_y が一定であれば、 Γ は相関係数 ρ しかあって、共分散 R に比例することになる。 x, y として、確率過程 $x(t), y(t-\tau)$ を考えると、

両者の共分散 R が相関関数 $\phi_{xy}(\tau)$ を与えるので、

$$\phi_{xy}(\tau) = \sqrt{\pi/2} \cdot \sigma_y \cdot r$$

(3-5)

以上の議論より、 x, y が Gauss 過程で、Ergode 性を満たしていると仮定すると、

図 3-2. のようにして相関関数が測定できることが分かる。したがって、このような場合には、相関関数を求めるための遅延装置としては、2 値信号のみを遅延させ得るものであればよいといえる。

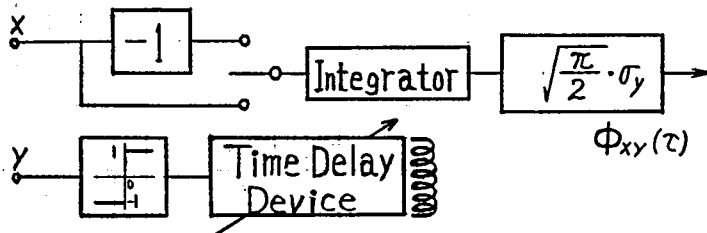


図 3-2. 2 値信号を用いた相互相関関数の測定

ただし、この方法が有効であるのは、平均値 0 の Gauss 過程の場合であり

Gauss 過程でなければ、平均値 0 で対称な分布をもっている、必ずしも (3-5) 式は成立しない。

3-2-2 2 値信号の可変遅延装置の構成 ^{33), 35), 36), 46), 47)}

この装置の遅延要素としては、比較的安価に大きな記憶容量の得られる磁歪遅延線を用いた。ところで、必要な遅延時間に対して、遅延線自体の遅延時間が非常に短いので、入力信号を何回か繰返してこの遅延線に通すことにより、所定の遅延時間 τ を得

る方式をとっている。したがって、遅延時間での設定は、この遅延線に何回通したものを出力として取り出すかという回数の指定、すなわち、書き込み、読出しの *Timing* の制御により行なうことができる。以下これについて説明する。

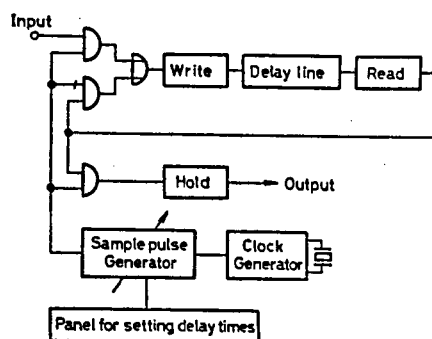


図 3-3. 2値信号の可変遅延装置の構成図

本装置の基本的構成を 図 3-3. に示す。入力記号は 周期 T (m フロップ) でサンプリングされ、遅延線に書き込まれる。サンプリングパルスが印加されない時は、遅延線に書き込まれた情報が読出回路を通して読出され、直ちに書き込み回路に送られて、再び遅延線に書き込まれる。サンプリングパルスが加わった時には、新しい情報が書き込まれると同時に、読出回路の出力は出力サンプリング回路を通して、遅延出力として取出される。この出力信号は最初遅延線に書き込まれてから何回か遅延線を通して、ちょうど所定の時間で経過したものでなければならぬ。

そのためには、以下にあげる条件が満足されなければならない。

- 1) 所定の遅延時間でだけ経過した情報が正しく出力として取出されること。
- 2) 新しい情報を書き込む位置にある情報は不要のものであること、すなわち、所定の

遅延時間 τ 以上経過したものであること。

3) 遅延線の記憶容量を最大限有効に使用すること。

4) 遅延時間 τ をパネル面上で任意に指定できること。(ただし、遅延時間 τ の取り得る値は適当に量子化されてよい。)

以下これを実現する方法を述べる。まず、記号を次のように定める。

S : クロックパルスの繰返し周期 ($\mu \text{ sec}$)

d : 磁歪遅延線の遅延時間 ($\mu \text{ sec}$)

n : クロックパルス S で働かせた場合の遅延線の記憶容量 (bit) ($d = n \cdot S$)

T : サンプリングパルスの繰返し周期 ($\mu \text{ sec}$)

m : S を単位として測ったサンプリングパルスの間隔 ($T = m \cdot S$)

最初に、 n と m とは互いに素でなければならないことを説明する。入力信号がサンプルされて遅延線に書込まれ、それが取出されるまでの時間は一般に、 $k \cdot n \cdot S$ (k : 整数) でなければならない。この間に入力をサンプリング回数^すは $[k \cdot n \cdot S / T] = [k \cdot n / m]$ 回であるから、必要な記憶容量 l (bit) は、

$$l = [k \cdot n / m] \quad (3-6)$$

ただし、 $[]$ はガウス記号を表わす。

ところで、遅延線の記憶容量は n (bit) であるから、

$l \leq n$ 、したがって、

$$k \leq m \quad (3-7)$$

が成立しなければ、サンプリングされた情報を全部記憶出来なくなる。したがって、書込まれた

信号は (3-7) 式を満足する k の範囲で出力として取出す必要がある。また、遅延線の記憶容量を最大限有効に利用する上からは、 $k=m$ とするのがよい。これは書込まれてから、 $m \cdot n \cdot S$ 後に取出すことになる。ところで、ある情報が遅延線を m 回まわる途中で、その位置に新たなサンプル入力が書込まれると、もとの情報は消滅してしまうので、これを防止するためには、 $k \cdot n \cdot S \neq j \cdot T$ 、すなわち、

$$k \cdot n \neq j \cdot m \quad (3-8)$$

(ただし、 j : 整数, $k=1, 2, \dots, m-1$)

でなければならぬ。これは n と m とが互いに素であることを意味する。

ところで、 $k=m$ とすると、遅延時間 T は、

$$T = m \cdot n \cdot S = m \cdot d \quad (3-9)$$

で与えられる。クロックの周期 S は遅延線の分解能の許す範囲内で、記憶容量 n をできるだけ大きくするようにある値に固定するのが便利であり、かつ遅延線の遅延時間 d も一定であるから、 T を可変にするためには m を可変にする必要がある。

それで、1) n と m とは互いに素、2) m は可変、という二つの条件を満足させるために、まず n を素数に選ぶと、

$$m = i \cdot n \quad (i: \text{整数}) \quad (3-10)$$

の場合だけ避けられ、 m を任意に選んでも m と n とは互いに素となる。

(3-10) 式が成立する場合は正常な動作が行なわれないので、遅延時間設定パネルを工夫して、(3-10) 式の関係にある m 、すなわち T を指定できないようにしている。

実際の装置では、 $d = 500 \mu sec$ ($\pm 2 \mu sec$), 分解能約 $1 \mu sec$ の磁歪遅延線を用いたので、 $S \approx 1 \mu sec$ とすると、 $n \approx 500$ (bit) となる。その付近で乗数をさがすと、 $499, 503$ がある。いま、 m (したがって、 τ) を順次大きくした場合、(3-2-10) 式の不都合が最初にかかるのは、それぞれ、 $m = 499, m = 503$

においてである。したがって、 $n = 503$ にとれば、 $m = 500$ ($\tau = 250 m sec$) までは大丈夫である。 $\tau = 250 m sec$ 以上は、 τ のさきみ中幅を $1 m sec$ の整数倍を単位として順次大きくとれば (3-10) 式の不都合は避けられる。

実際には人間との interface を考えて、3桁の有効数字(偶数のみ)と倍率(10進)をパネル面上で設定できるようにしている。

3-2-3 遅延時間の異なる複数個の出力を同時に取出す工夫

3-2-2 で述べた装置では、一つの遅延出力しか得られないので、相関関数を測定する場合、1回の測定で1点の値しか求めることが出来ない。そのため、相関関数全体を測定するには、かなりの測定回数が必要となる。そこでこの装置の出力のサンプリングパルスの位相を適当に選ぶことにより、遅延時間の異なる複数個の出力が同時に得られるようにした。以下その方法について述べる。

出力としては、遅延時間が $k \cdot \tau / q$ ($k = 1, 2, \dots, q$) の q 個の出力を得る場合を考える。ただし、 q は磁歪遅延線の記憶容量 n (bit) より大きくはない整数で、入力のサンプリングパルスの間隔 m の約数でなければならぬ。

まず初めに、遅延線の出力を $m_0 = m / q$ (m : フロップ S を単位として

測った入力サマリングパルスの間隔, m_0 : 整数) クロックの間隔で, 入力サマリングパルスに同期してサンプルすれば, τ/g (τ : 遅延時間設定パネル面上で指定される遅延時間) の整数倍の遅延信号が得られることを示す。

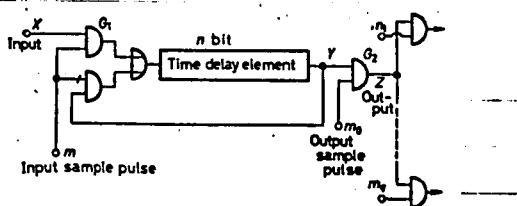


図 3-4. 79出力可変遅延装置の基本構成図

図 3-4. を参照し, ゲート G_1 でサンプルされた入力信号が遅延線に書込まれてから, Y 表に現われるのは, n フロップ毎である。一斉, ゲート G_2 は, m_0 フロップ毎に開く。ところで, n と m とは互いに素に選んであるので, n と m_0 も互いに素になる。したがって, 出力 Z には, $n \cdot m_0$ フロップ毎にしか信号は出ない。すなわち, そのサンプル信号の $n \cdot m_0 \cdot S$, $2n \cdot m_0 \cdot S$, ..., $g \cdot n \cdot m_0 \cdot S$ だけ遅延した信号が順次出力 Z に現われる。よして, $g \cdot n \cdot m_0$ フロップ (時間にすれば, $n \cdot m_0 \cdot S = \tau$) 遅延した信号が取出されると同時に, 新しい入力がその場所に書込まれる。以下同じことが繰返される。

よして, 入力信号の $k \cdot \tau/g$ ($k=1, 2, \dots, g$) だけ遅延した信号を得るためには, Z に現われる信号を適当なゲートを設けてぶい分ければよい。

いま、そのためのゲートパルスとしては、入力のカウントパルスと同じパルス間隔で、その位相が、 $i \cdot m_0 / g$ ($i = 1, 2, \dots, g$) フラックだけ異なるパルス(このパルスを簡単のためパルス m_i ($i = 1, 2, \dots, g$) とよぶ。)を用いなければならない。これを図 3-5. によって説明しよう。パルス m_i ($i = 1, 2, \dots, g$) に

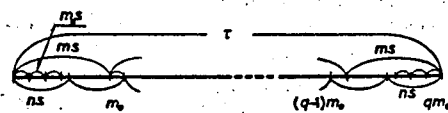


図 3-5. 遅延時間の分割

よってゲートされた出力が $k \cdot \tau / g$ ($k = 1, 2, \dots, g$) の遅延時間をもつ出力であるためには、 τ を $m_0 \cdot S$ で分割していた場合の $(g \cdot j + i)$ 番目の突と、 $n \cdot S$ で分割していた場合の $k \cdot m_0$ 番目の突とが一致しなければならない。それによって次の関係式を得る。

$$(g \cdot j + i) \cdot m_0 \cdot S = k \cdot m_0 \cdot n \cdot S \quad (3-11)$$

(ただし、 j : 整数) したがって、

$$g \cdot j + i = k \cdot n \quad (3-12)$$

ところで、 $n = n_0 \cdot g + n_1$ (n_0 : 整数, n_1 : g 未満の正の整数) として、(3-12) 式に代入し、整理すると、

$$g(j - n_0 \cdot k) + i = n_1 \cdot k \quad (3-13)$$

ここで、 i, k は g 以下の正整数であるので、

$$i = k \cdot n_1 \pmod{g} \quad (3-14)$$

と同値である。

(3-14)式において、 n_1 と g とは互いに素であるから、 i と k とは 1 対 1 に
 対応する。したがって、この式中には m, m_0 がないので、サンプリングパルスの間
 隔、即ち、遅延時間 τ の値に無関係に、 $k \cdot \tau / g$ の遅延時間を持つ出力
 は、各々 k に対応するゲートから得られることが分かる。

g の値は n 以下であれば原理的にはいくらでもよいが、実際の装置製作
 上の便利さと、入力のサンプリングパルスの間隔 m が g の倍数でなければなら
 ないこと、すなわち、指定する遅延時間の制約などから、本装置では、 $g = 10$
 に選んで、10個の遅延時間の異なる出力が同時に取出せるようにしてある。

$g = 10$ 、 $n = 503$ の場合の k と i との関係を表 3-1 に示す。

表 3-1. k (遅延時間 $k\tau/10$ に対応する) と
 出力サンプルゲートの番号 i (m_2 の位相は入力
 サンプルパルスと $i\tau/10$ だけ異なる) との関係

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	3	6	9	2	5	8	1	4	7	10

(遅延線の記憶容量: $n = 503$)

§3.3. ランダム ノイズ発生器⁽²³⁾

このランダム ノイズの発生原理は 図3-6 に示すように、ノイズ源としては ノイズの
 大きな Zener Diode を使い、この物理的に発生した雑音電圧を増幅し、
 帯域 フィルターに通して増幅したものをシュミット回路に通して矩形波に直し、これを
 Flip-Flop を使わないで 2つの値を等確率でとるような 2値ランダム信号をつくり、
 これを、その平均反転時間より十分長いサンプリング周期のパルスで サンプル・ホールドして
 coin tossing type の random Telegraph noise を発生させている。

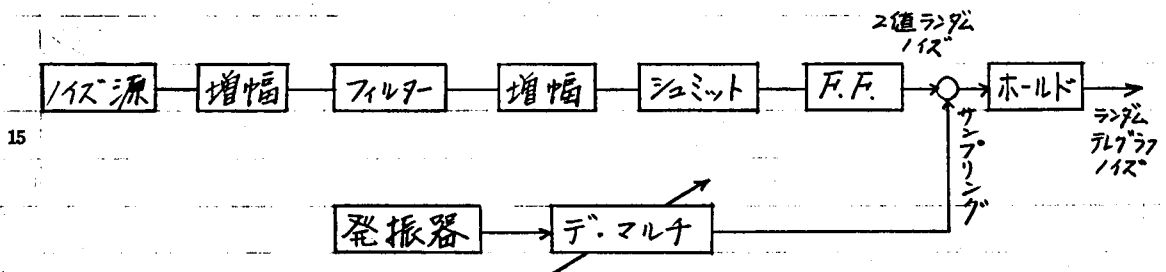


図3-6. ランダム ノイズ発生器の構成図

本装置で発生するノイズはアナログコンピューターとの組合せを想定しているので、
 サンプリング周波数の種類としては、 $1, 1/2, 1/8, 1/16 \text{ KHz}$ が利用出来るように
 構成している。この装置の設計の際、特に重要な条件は、次の2点である。

- (1) 出力信号の平均値が零であること。
- (2) サンプリングされた値に関して“白色”であること。すなわち、出力信号のサンプリング
 周期以上はなれた値は互いに無相関であること。

このため、まず(1)の条件を満たすように図3-7に示す如く、F.F. (対称形 Flip-Flop) を挿入した。F.F. を用いるとその入力がたとえ zero mean でなくても、F.F. の出力は zero mean になることは図3-7. に示す如く明らかである。

しかし、このF.F. を通すことにより相関が生じ、(2)の条件が問題になってくる。ところで、F.F. の入力の零点分布を仮に単位時間に落ちる零点の個数が λ の poisson とすると、McFadden, J. A. によれば、その出力の相関は $F(\tau) = \exp(-\lambda|\tau|) \times \cos \alpha \tau$ になっている。また、サンプリング周波数の最高は 1 KHz であることを考慮すると、F.F. の入力の平均反転時間は $100 \mu \text{Sec}$ 以下にあれば実用的には十分無相関と考えられる。(付録I参照)

F.F. は 2SC269 を用いた飽和型回路で立上り、立下り時間が共に約 70 nsec になり、 200 nsec 間隔で加わるパルスに対しては完全に応答する。

したがって、シュミット回路の出力を Poisson と仮定すると、その平均反転時間が

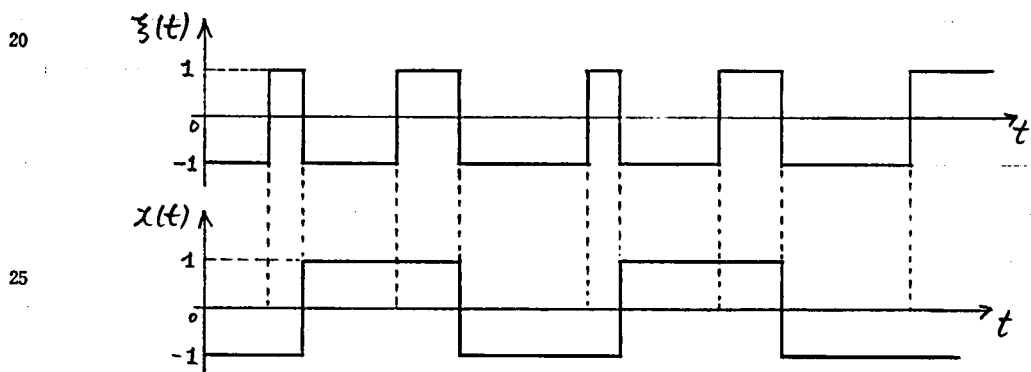


図3-7. Zero mean のための Flip-Flop の効果

$$\begin{pmatrix} x(t): \text{Flip-Flop の入力} \\ y(t): \text{Flip-Flop の出力} \end{pmatrix}$$

$1\mu\text{sec}$ 以上であれば、パルス間隔が 200nSec 以下になる確率は
18%程度におさえられる。

一方、Noise 源としては Zener Diode を用いているので、その出力は非常に
5 高周波成分までかなりのレベルで含んでいる。それを増幅する際、そのままだけ
ゲインが小さくても振幅は非常に大きくなり、すぐに飽和してしまう。そこで上述
のシュミットの平均反転時間と $1\mu\text{Sec}$ 程度にすることも考慮に入れて、
10 cut off 周波数が 1MHz 程度のフィルターを挿入した。なお、このフィル
ターの回路構成としてはミラー積分回路を用いた。シュミット回路は
F.F. の反転を確実にさせるために挿入した。また、F.F. が完全に対称
でないと、平均値に偏りを生ずるおそれがあるので、F.F. の回路構成でも、
15 トランジスタや抵抗などの構成素子を出来るだけ特性のそろったものを用い、
反転レベルが等しくなるようにした。

なお、出力の平均値を零にするには、F.F. を用いないでも、出力の平均値
20 で feed-back をかける方法によっても実現できる。その場合についても
検討したが、その時には出力信号の白色性を保証することがむずかしい
ので、F.F. による方法を採用した。

25 この装置で発生した random telegraph noise の自己相関関数
の実測値のグラフが図 3-9. である。このグラフから、ほぼ設計通りの
noise を発生させていることが分かる。また、zero mean, 連の検定で
30 も十分よい結果を得ている。

§3-4 本装置を用いた相関関数の測定

本装置とアイコン（日立 ALS-1010 型）およびノイズ発生器³²⁾（coin Tossing 型の random telegraph noise を発生する装置）を使用し、図 3-8. に示すような測定回路で実験を行なった。

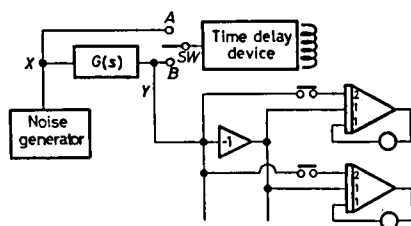


図 3-8. 相関関数測定のブロック・ダイヤグラム

SW を A に接続すると、 x, y の相互相関関数が、B に接続すると、 y の自己相関関数が、また、 $G(s) = \text{const.}$ とすると x の自己相関関数が得られる。

1) ノイズの自己相関関数

図 3-9. に、試作したノイズ発生器の出力の自己相関関数の測定例を示す。

3本のグラフは、測定したノイズが、サンプリング間隔がそれぞれ $4m\text{ sec}$, $8m\text{ sec}$, $16m\text{ sec}$ の 2 値ノイズであることに対応する。この型のノイズの自己相関関数は、 τ をサンプリング間隔とすると、

$$\left. \begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= a^2 \cdot (1 - |\tau|/\tau) & (|\tau| \leq \tau) \\ &= 0 & (|\tau| > \tau) \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

で与えられる。測定結果は十分満足すべきものである。

2) 1次遅れ系の相互相関関数

図3-10. および図3-11. に、1次遅れ系の入力力間の相互相関関数の測定結果を示す。図3-10. は、入力がサンプリング間隔が $16m\ sec$ で、random telegraph noise である場合の平均反転時間は約 $25m\ sec$ であって、1次遅れ系を通じた出力との相互相関関数の理論値は、

$$\begin{aligned} R_{xr} &\cong A^2 \{ \exp(-8.76\tau) - 0.55 \exp(-80\tau) \} \\ &\quad (\tau \geq 0) \\ &\cong 0.45 A^2 \cdot \exp(80\tau) \quad (\tau < 0) \end{aligned} \tag{3-16}$$

である。上式右辺の $\exp(-80\tau)$ の項が $\exp(-8.76\tau)$ に比べて無視できず、その影響で単一の指数関数のグラフからかなりずれている。

一方、図3-11. は、入力がサンプリング間隔が $4m\ sec$ の random telegraph noise で、その平均反転時間は約 $6m\ sec$ であるから、(3-16)式の $\exp(-80\tau)$ の項が、 $\exp(-320\tau)$ となり、 $\exp(-5\tau)$ に比べてほとんど無視できる。したがって、この場合は random telegraph noise というよりはむしろ、white noise に近くなり、グラフの形も white noise を探索信号として用いた場合の相関関数、すなわち、インパルス応答に非常に近くなっている。グラフより求めた減衰定数は 4.93 (理論値 5) である。

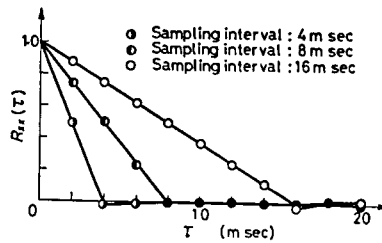
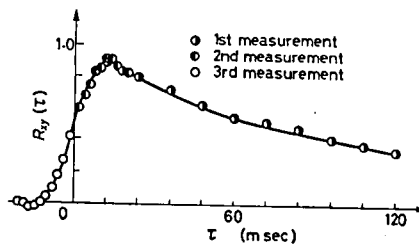


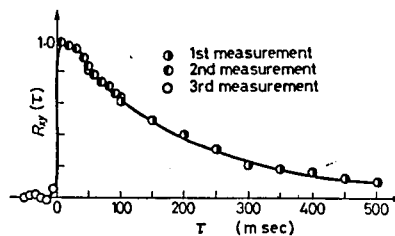
図 3-9. coin tossing 型ノイズ発生器
の出力の自己相関関数



$$G(s) = \frac{1}{1+sT}, \quad \frac{1}{T} = 8.76$$

(Sampling interval : 16 m sec)

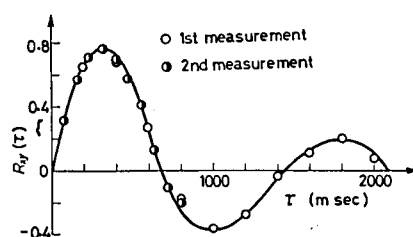
図 3-10. 一次系の入出力の相互相関
関数 (その I)



$$G(s) = \frac{1}{1+sT}, \quad \frac{1}{T} = 5.00$$

(sampling interval : 4 m sec)

図 3-11. 一次系の入出力の相互相関
関数 (その II)



$$G(s) = \frac{-K}{1 + 2hTs + T^2s^2}, \quad T, h = \sqrt{\frac{5}{10}}$$

(sampling interval : 16 m sec)

図3-12. 二次系の入出力の相互
相関関数

3) 2次系の相互相関関数

図3-12. は2次系の入出力間の相互相関関数の測定結果を示す。

この場合も, *random telegraph noise* と考えた時の平均反転時間が2次系の等価的な時定数(この場合の減衰定数は1)に比べて十分小さいので, ほほインパルス応答を表わしている。

このインパルス応答の理論式は,

$$g(\tau) = \exp(-\tau) \cdot \sin(\sqrt{19}\tau) \quad (\tau \geq 0)$$

$$= 0 \quad (\tau < 0) \quad (3-17)$$

である。正弦波の周期は約1.44秒, 減衰定数は1である。グラフより求めると, 周期は約1.42秒, 減衰定数は0.98である。

以上の結果から, この試作装置が非常に精度よく動作していることが分かる。

なお、この2値信号の可変遅延装置は相関関数の測定に便利のように、同時に遅延時間の異なる複数個の出力が得られるように工夫されているので、1次遅延系のような簡単な形のものであれば、1回の測定でその相関関数全体を得ることができ、また、2次あるいはそれ以上の系のように相当複雑なものでも、1回の測定で大体の概形を知り、遅延時間の適切な値が分かるので、2回あるいは3回程程度の測定でかなり正確にその相関関数の形全体を知ることが出来ることになる。

また、いくつかの相関関数の測定結果から、ランダム・ノイズ発生器も、ほぼ設計通りの性能を持っていることがわかる。

第4章 インパルス応答を用いた等価的2次系の伝達関数の推定

§4.1 序

適応制御系においては、時間と共に刻々変動する制御系の動特性、あるいは制御対象の動特性を絶えず測定することが必要であり、また、動特性推定の方法には、種々あるが、適応制御系で要求される定常運転中のプロセスの動作を大きく乱さず、比較的短時間に、系の動特性を求める方法として、 M 系列信号などの擬似ランダム信号や、系自身に内在する雑音を用いて、相関法によりインパルス応答を求める方法が有力であることが知られている。^{(1)-(23), (27), (28)} また、そのための装置等について前章までに述べてきた。しかし、この得られたインパルス応答を直接用いて、制御することは困難で、一般にこれを広義のパターン認識法により処理して、その系の伝達関数等のパラメータを求めることが行なわれている。

本章においても、プラントの動特性推定において、その系のインパルス応答の有限個のサンプル値が測定誤差（相関演算における積分時間が有限であるための誤差、仮定した系と実際の系との次数の違いによる等価的誤差、プロセスパラメータの時間変動による等価誤差等）を含んだ値として与えられるとき、これらの値から、その系のパルス伝達関数を推定する問題を考えている。前田²⁰⁾の方法はこのような動特性推定を含む適応制御系について述べているが、ここではインパルス応答を用いて、パターン認識法により、あらかじめ前もって、想定したいくつかの有限個のパターンにあてはめるものであるが、本章で述べる方法では、推定により得られるプロセスパラメータ（パルス伝達関数のパラメータ）は、インパルス応答より直接計算される値をとる。

ところで、実際の系は一般に非常に高次の系であるが、あまり高次の系で近似

してもデータ処理が複雑なばかりで得策とはいえない。実用的には2次系(振動的な系も近似出来る最小次数)で近似してもよい場合が多いと考えられるのでここでも制御対象のパルス伝達関数を2次系とし、そのパラメータをその系のインパルス応答の測定値から推定する方法について検討した。

(なお、推定すべき系が、立上りの非常にゆるやかな高次の系で、2次系では近似しがたい場合には、オプ章で述べる。)

このようなパラメータ推定には従来、Pencircの擬似逆行列の特別な形である最短左側インバースを用いる方法が式誤差の2乗和最小の意味で最適であると考えられていた。^{6), 24)~26)}しかし、推定すべきパラメータの値を出来るだけ正確に推定するという意味で、

また、これにより得られた情報を用いて制御を行なった場合、系全体の制御特性が最も良好になるという意味で最短左側インバースによる方法が必ずしも最適である

とはいえないことを §4.3 で示し、またそのデータ処理が複雑であること等を考慮して、データ処理が容易で、ノイズにも比較的強い新しい方法を §4.4 で提案している。さらに §4.5 ではその改良形を示している。^{27)~29)}

そして §4.6 ではそれら推定機構としての良さを、それによって得られた推定値の真値からの偏りとそのまわりの分散の点で、従来の最短左側インバースによる方法と比較検討している。

また §4.7 では推定誤差はその制御系の特性、すなわち、パルス伝達関数の特性根に依存するが、その系の特性はまた、サンプリング周期を変えることにより等価的に変化する。したがって推定誤差はサンプリング周期の関数と考えられ、

サンプリング個数が有限であることを考慮すると推定誤差を最小にするようなサンプリング周期が存在する。このような最適サンプリング周期についても考察している。

5

§4.2 パルス伝達関数のパラメータとインパルス応答の関係.

前章までに述べてきたような
 10 相関法によるインパルス応答の測定を想定しているので得られるインパルス応答というのは、遅れ時間
 15 に対して連続的な値をとらず、あるとびとびの離散的な遅れ時間

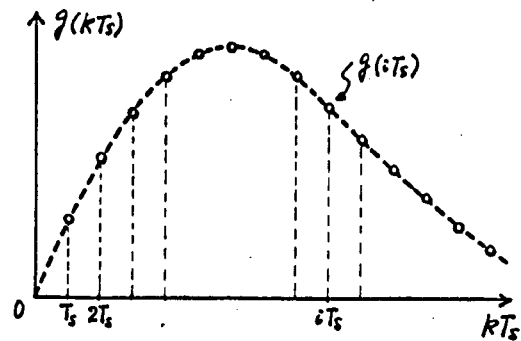


図4-1. インパルス応答のサンプル値

(普通には、ある時間幅の整数倍の遅れ時間：図4-1では、 $iTs : i=1, 2, \dots, n$)
 20 における値、すなわち、インパルス応答のサンプル値が、測定値として得られることになる。

いま、インパルス応答のサンプル値列 $g_k, (k=0, 1, 2, \dots, n, \dots)$ が与えられる

と、その系のパルス伝達関数は(4-1)式のように書き表わすことができる。

25

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \cdot z^{-k} \quad (4-1)$$

ただし $\left(\begin{array}{l} g_k : \text{遅れ時間 } kTs \text{ におけるインパルス応答のサンプル値} \\ Ts : \text{サンプリング周期} \end{array} \right.$

30

また、ここで考える系のパルス伝達関数は実用的見地から (4-2) 式で示すような 2 次系で近似的に表わすことが出来るものとする。

$$G_A(z) = \frac{\alpha_3 \cdot z^{-1}}{1 + \alpha_1 \cdot z^{-1} + \alpha_2 \cdot z^{-2}} \quad (4-2)$$

なお (4-2) 式は、直達分がなくしかもあまり立上りがゆるやかでない系で、振動的なものも表現出来る最も簡単な式として採用している。

いま、(4-1) 式で表わされる系が正確に (4-2) 式で表現され、しかも測定時のノイズもない理想的な場合の (4-1) 式の g_k ($k=0, 1, 2, \dots, n, \dots$) と (4-2) 式の α_i ($i=1, 2, 3$) の関係式を、両式の z^{-k} の係数を比較することにより求め、(4-3)、(4-4) 式を得る。

$$g_{k-1} \cdot \alpha_2 + g_k \cdot \alpha_1 + g_{k+1} = 0 \quad (4-3)$$

$$(k=1, 2, \dots)$$

$$\alpha_3 = g_1 \quad (4-4)$$

以上は、インパルス応答のサンプル値列 g_k ($k=1, 2, \dots$) がノイズにみだされず、そのまま得られるとしたが実際には、これにノイズが重畳した測定値 r_k として与えられることになる。

$$r_k = g_k + \varepsilon_k \quad (4-5)$$

ただし g_k : 時刻 kT_s におけるインパルス応答のサンプル値の真値。

ε_k : g_k に重畳するノイズ。分散が一定の white noise と考える。

なお、実際には (4-2) 式の形で正確には表現出来ないものであるが、以後いざらしくは、これによる等価的なノイズは考えないことにする。

(4-3), (4-4)式において, $f_k (k=1, 2, \dots)$ の代りに測定値 $h_k (k=1, 2, \dots)$ で置き換えた式を (4-3)', (4-4)' 式とする。この (4-3)', (4-4)' 式は厳密には成立しないのであるが近似的に成立するものとし, これらの式を用いて, 有限個の測定値 $h_k (k=1, 2, \dots)$ による $\alpha_i (i=1, 2, 3)$ の推定を行なうことを考える。

(4-4)' による α_3 の推定は簡単であるから, 以後は (4-3)' 式による $\alpha_i (i=1, 2)$ の推定について考える。

$$h_{k-1} \cdot \alpha_2 + h_k \cdot \alpha_1 + h_{k+1} \cong 0 \quad (4-3)'$$

$$(k=1, 2, \dots, n)$$

$$\alpha_3 \cong h_1 \quad (4-4)'$$

(4-3)' 式をマトリクス表示したものを (4-6) 式とする。

$$F \cdot X = G \quad (4-6)$$

ただし, $F \triangleq \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & h_4 & \dots & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{n-2} \end{bmatrix}^T$ (4-7)

$$X \triangleq [\alpha_1, \alpha_2]^T \quad (4-8)$$

$$G \triangleq -[h_3, h_4, h_5, \dots, h_n]^T \quad (4-9)$$

ここで, $[\cdot]^T$ はマトリクス $[\cdot]$ の転置を表わす。

§4.3 最短左側イタースによる方法 (MLIM)

(4-6) 式は, α_1, α_2 に関する線形の連立方程式である。また, (4-7) 式が

矩形行列であることから分かるように未知数の数よりも方程式の数の方が多い形で、
 各行が独立の場合は、一般に解は存在しない不能の形である。もし g_k ($k=1, 2, \dots, N$) にノイズが重畳せず、 $g_k = f_k$ ならば、(4-6)式中の2行だけが独立
 となり、任意の2行から解を求めることが出来る。しかし、 g_k は測定値として与
 えられているので必ずノイズを含んでいる。このような場合 (4-6)式の平均的な意味
 での近似解は、(4-10)式に示すような最短左側インバースと呼ばれる擬似
 逆行列 (Penroseの一般化逆行列の特別なもの) を用いて求められることが
 知られている。²⁴⁾

$$H^{LM} = (F^T \cdot F)^{-1} \cdot F^T \quad (4-10)$$

(4-11)式に示す H^{LM} による解 α_1^M, α_2^M の物理的意味は、(4-6)式の
 α_1, α_2 に α_1^M, α_2^M を代入した時の各行の式誤差の2乗和が最小となる
 ような α_1, α_2 の値である。

$$X^M = H^{LM} \cdot G \quad (4-11)$$

ただし、

$$X^M \equiv [\alpha_1^M, \alpha_2^M]$$

したがって、(4-10)、(4-11)式により、 α_1^M, α_2^M を求める方法は、 g_k にノイズ
 を含んでいるとき、その各 g_k における信号雑音比が同程度の場合、最も最適な
 近似解を与えると考えられる。

しかし、相関法によりインパルス応答を測定することを想定しているので、 g_k に重畳
 するノイズは、 g_k の大きさには関係なく、分散が一定であると考えるのが妥当である。

したがって、各 α_i における信号雑音比は一定と考えられず、 α_i を出来るだけ正確に推定するという意味で最短左側インバースによる方法(以下 *Minimum Left Inverse*

Method の略、MLIM と呼ぶ。)が必ずしも最適とはいえない。この MLIM を最適

な推定法とするためには、(2-6)式に最適な *weight* をかけてから MLIM を

適用する必要がある。しかしそのためのアルゴリズムを求めるにはかなりの困難を要するのであろうし、また、たとえそのアルゴリズムが求まったとしても、それはこれから

推定すべき α_i (パラメータの真値)、またはサンプル値 g_k (真値)の関数となる

はずで、厳密な意味での最適な *weight* を得ることは不可能である。

そこで、実際問題としては、まず適当な *weight* (たとえば "1") を使って MLIM を適用し、これにより得られた推定値を仮りの真値と考え、準最適な *weight* を決定する。

次に、その準最適な *weight* をかけて MLIM を適用し、より真値に近い推定値とより最適に近い *weight* を求める。このような操作を繰返して、逐次的に真値に

近づけていくといった方法を取らざるをえないであろう。

ところで、上記のような操作を何度も繰返して、 α_i を求めたとしても、それは2次

系で近似した範囲内での最良な推定値でしかない。しかし、実際の系は一般に

厳密には非常に高次の系であり、それを2次系で近似したためにおこる誤差

はここでは無視し、推定するものとしているが、実際には、本来存在するところの次数の違いによる誤差も考慮に入れないといけない。

以上のような意味において、最適な *weight* を用いた MLIM も必ずしも最良な推定法であるとはいえない。

また、on-line の動特性推定を考えているので出来るだけ短時間に測定す

ことなどから、以後ここで取扱うMLIMはweight 1で1回だけ最短左側インバースを用いる方法を意味するものとする。

5 §4.4 新しい推定法 (NM)

§4.3 で述べた推定法 (MLIM) は、与えられた有限個のサンプル値と同時にすべて用いる方式であるため、そのデータ処理が繁雑になり、
10 実用的立場から問題があった。そこで、与えられた有限個のサンプル値を
数個一つのサンプル値からなる幾組かに分け、各組での推定値を何人かの意
味で平均して所要の推定値を得る方法が考えられる。しかし、1組のサン
15 プル値は任意の数までよいだけでなくそれによる推定機構が簡単なこと、
また、ノイズに対して出来るだけ強い構造になっていることが要求される。

そのため、(4-3)式とは独立に、 α_1, α_3 に関する線形の関係式 (4-12)
式も導出した。(付録Ⅱ参照)

$$20 \quad g_{2k} \cdot \alpha_3 - g_k^2 \cdot \alpha_1 - 2 \cdot g_k \cdot g_{k+1} = 0 \quad (4-12)$$

(4-3), (4-12)式より,

$$25 \quad \left. \begin{aligned} \alpha_1 &= (\alpha_3 \cdot g_{2k} - 2 \cdot g_k \cdot g_{k+1}) / g_k^2 \\ \alpha_2 &= (-\alpha_3 \cdot g_{2k} + g_k \cdot g_{k+1}) / (g_k \cdot g_{k-1}) \end{aligned} \right\} \quad (4-13)$$

($k=2, 3, \dots, [n/2]$)

(4-13)式において、 α_3 を (4-4)式を用いて、 g_1 で置き換えた式
30 を (4-13)式とすると、これは、 α_1, α_2 が g_k ($k=1, 2, \dots, n$) より直ちに
計算出来る形になっている。

すなわち、(2-13)式において、 $g_k (k=1, 2, \dots, n)$ の代りにその測定値 h_k
 $(k=1, 2, \dots, n)$ で置き換えた式を(2-14)式とすると、この式が各組での α_1, α_2
 の推定値を求めるためのアルゴリズムを与える。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha}_1^{(k)} &= \frac{h_1 \cdot h_{2k} - 2 \cdot h_k \cdot h_{k+1}}{h_k^2} \\ \hat{\alpha}_2^{(k)} &= \frac{-h_1 \cdot h_{2k} + h_k \cdot h_{k+1}}{h_k \cdot h_{k-1}} \end{aligned} \right\} \quad (k=2, 3, \dots, [n/2]) \quad (2-14)$$

すなわち、これから $\hat{\alpha}_i^{(k)} (i=1, 2; k=2, 3, \dots, [n/2])$ の k についての相加平均をもって、
 すなわち、(2-15)式により、 $h_k (k=1, 2, \dots, n)$ から $\alpha_i (i=1, 2)$ を推定する
 方法 (以下、New Method I の略、NM_I と呼ぶ) を提案する。³⁷⁾

$$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{m-1} \sum_{k=2}^m \hat{\alpha}_i^{(k)} \quad (i=1, 2; m=[n/2]) \quad (2-15)$$

この方法 (NM_I) によるサンプル集の取り方は、(2-14)、(2-15) 式で分かるように、
 アルゴリズムが簡単で、しかも適当に離れた々集 ($\hat{\alpha}_i^{(k)}$ の場合: $h_1, h_k, h_{k+1}, h_{2k}$),
 または 5 集 ($\hat{\alpha}_2^{(k)}$ の場合: $h_1, h_{k-1}, h_k, h_{k+1}, h_{2k}$) を用いて推定する方法であ
 るために、インパルス応答の全体的な特徴を把握して推定する方式になっている。

また、(2-14)、(2-15) 式の形から分かるように各々のサンプル値が最終的な推定値 $\bar{\alpha}_i$
 $(i=1, 2)$ におよぼす影響は一様ではない。すなわち、あるサンプル値は数個用いられ、
 あるサンプル値は 1 回または 0 回しか用いられないというように、推定式自体に、natural
 weight がついていると考えられる。したがって、サンプリング周期が適当に選ばれて

いる場合には、そのデータ(インパルス応答のカラメル値 h_k)の比較的信頼性の高い最初の部分の *weight* が大きくなっており、望ましい *natural weight* になっているので、単なる相加平均をしただけの比較的ノイズに強い推定方式になっているといえる。

ところで、(4-13)' 式(あるいは(4-4)式)に g_1 (あるいは h_1) が特別な形で入っている。これは、(4-4)式により、 $\alpha_3 = g_1$ という関係式より、 α_3 の推定値を h_1 を用いて得ることを考えているからである。

このように、ある特別な1点のカラメル値から、プロセスパラメータを推定するのは、ノイズの影響の点から望ましくないのであるが、MLIM でも (4-4) 式を用いて、 α_3 を推定するようになるので MLIM との推定機構の良否の比較をする上で、このような NM を考えている。したがって実際には、 α_3 の推定にも、インパルス応答の全体的な特徴をとらえて推定することが望まれる。

そこで、(4-3)、(4-12) 式とは独立にさらに α_3 と g_k ($k=1, 2, \dots, n$) に関する (4-16) 式を導出する。(付録 III 参照)

$$\alpha_3 = g_k \cdot \sqrt{\frac{g_{k+1}^2 - g_k \cdot g_{k+2}}{g_{2k}^2 - g_k \cdot g_{3k}}} \quad (4-16)$$

$$(k=1, 2, \dots, [n/3])$$

(4-16) 式において、 g_k の代りに測定値 h_k ($k=1, 2, \dots, n$) を置き換えた式を (4-16) 式とし、その式より得られる α_3 の推定値を $\hat{\alpha}_3^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, [n/3]$) とする。これを k について相加平均したもので α_3 の最終的な推定値を得る。

$$\therefore \hat{\alpha}_3^{(k)} = \sqrt{\frac{h_k^2 (h_{k+1}^2 - h_k \cdot h_{k+2})}{h_{2k}^2 - h_k \cdot h_{3k}}} \quad (4-16)'$$

$$(k=1, 2, \dots, [n/3])$$

$$\bar{\alpha}_3 = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l \hat{\alpha}_3^{(k)} \quad (l = \lceil n/3 \rceil) \quad (4-17)$$

この $\bar{\alpha}_3$ を (4-14) 式の α_3 の代りに用い、しかも (4-8) 式の代りに、
 (4-16)', (4-17) 式を用いる方法と NMII (New Method II の略)
 と呼ぶことにする。

ここで、(4-12) 式あるいは、(4-13) 式、(4-16) 式が α_i ($i=1, 2, 3$) と推
 定するための唯一の式ではなくて、それらと類似の式はいくらでも考えられるが、それら
 の中で出来るだけ簡単で、しかもインパルス応答の全体像をとらえ、与えられた
 データと出来るだけ有効に利用する式として提案したものである。

§ 4.5 改良した新しい推定法 (INM)

§ 4.4 で述べた NM は、インパルス応答のサンプル値が極端に小さい
 値をとらない場合には、従来の方法 (MLIM) に比べデータ処理が簡単で、
 推定機構としての良さもすぐわかってかなり有効であることが確かめられた。

(§ 4.6 参照) しかし、対象としている系が振動的である場合 (パルス伝達
 関数が複素根をもつ場合等) には、(4-14) 式の分母の項 (h_k, h_{k-1})
 が殆んど零に近い値をとることもあり、また、ある場合には、(4-16) 式の分母が
 零に近い f の値をとったり、根号の中が負になったりすることもある。

このようなときは、ノイズが非常に大きく影響し、推定誤差を極端に増加
 させることになる。そこで、つぎの3つの観点から、(4-14) 式に相当する weight

をつけて平均することと考えると、 $\hat{\alpha}_1^{(k)}$ には h_k^2 、 $\hat{\alpha}_2^{(k)}$ には $|h_k \cdot h_{k-1}|$ の weight

とつて平均する方法、すなわち、(4-18)式により、 $\hat{\alpha}_2$ と得る方法 (Improved New Method I の略 INM_I と呼ぶ) を提案する。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= \sum_{k=1}^{[n/2]} (h_1 \cdot h_{2k} - 2 h_k \cdot h_{k+1}) / \sum_{k=1}^{[n/2]} h_k^2 \\ \hat{\alpha}_2 &= \sum_{k=2}^{[n/2]} (-h_1 \cdot h_{2k} + h_k \cdot h_{k+1}) \cdot \text{sgn}(h_k \cdot h_{k+1}) / \sum_{k=2}^{[n/2]} |h_k \cdot h_{k+1}| \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

i) 推定式の分母に極端に零に近くなることのないこと。

ii) 得られた推定値の分散が出来るだけ小さいこと。

iii) 推定機が簡単なこと。

INM_I は (4-18) 式から分かるように上の i), iii) は満足していることは明らかである
 なら、weight は各推定値で同符号でなければならぬので、(4-18) 式の $\hat{\alpha}_2$ では、 $\text{sgn}(h_k \cdot h_{k+1})$ の項がついている。

さらに、ii) については、つぎの章でかなり一般的に述べることから分かるように、
 INM_I において適用している weight は分散最小という意味で実用的には近似的に準最適な weight になっている。

つぎに、NM_I にも上記の weight を適用し、 α_3 の推定にも α_1, α_2 の推定の類推から次のような推定式を採用する。

すなわち、まず、(III-6) 式において、 $f_k (k=1, 2, \dots, n)$ の代わりに測定値 $h_k (k=1, 2, \dots, n)$ で置き換えた式を (III-6)' 式とし、それにより α_3^2 の推定を行ない、それから k について平均して、最終的な α_3^2 の推定値 $\hat{\alpha}_3^2$ を求めた後、その平方根をとって、 $\hat{\alpha}_3$ を

求めることを考える。そこで上記の weight は、(Ⅲ-6)式で α_3^2 の推定を行なう際に

$|h_{2k}^2 - h_k \cdot h_{3k}|$ の weight をつけて平均し、 $\hat{\alpha}_3^2$ を得る。

$$\hat{\alpha}_3^2 = \frac{\sum_{k=1}^{[n/2]} h_k^2 (h_{k+1}^2 - h_k \cdot h_{k+2}) \cdot \text{sgn}(h_{2k}^2 - h_k h_{3k})}{\sum_{k=1}^{[n/2]} |h_{2k}^2 - h_k \cdot h_{3k}|} \quad (4-19)$$

$$\hat{\alpha}_3 = \sqrt{\hat{\alpha}_3^2} \quad (4-20)$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{k=1}^{[n/2]} (\hat{\alpha}_3 \cdot h_{2k} - 2 h_k \cdot h_{k+1})}{\sum_{k=1}^{[n/2]} h_k^2} \quad (4-21)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\sum_{k=2}^{[n/2]} (-\hat{\alpha}_3 \cdot h_{2k} + h_k \cdot h_{k+1}) \text{sgn}(h_k \cdot h_{k-1})}{\sum_{k=2}^{[n/2]} |h_k \cdot h_{k-1}|} \quad (4-22)$$

すなわち、(4-19)~(4-22)式により、 $\alpha_i (i=1, 2, 3)$ の推定値を得る方法

(Improved New Method II の略、INMII と呼ぶ。)を提案する。

なお、ここで採用した weight は定性的には、与えられたデータ (インパルス応答の
サンプル値) のパワーに 近いものである。

§4.6. 推定機構としての良士の評価

§4.3 で述べた MLIM に比べ §4.4, §4.5 で述べた NM, INM の方が簡単な推定機構になっていることは確かであるが、つぎに、これらの推定機構としての良さについて考えよう。

これには、MLIM, NM, INM による推定値の真値からの偏りとそのばらりの分散を評価する方法が考えられる。

いま、一般に、推定値 $\hat{\alpha}$ が (4-23) 式のように展開出来たとする。

$$\hat{\alpha} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \varepsilon_j + \sum_{j,k} \mu_{jk} \cdot \varepsilon_j \cdot \varepsilon_k + O(\varepsilon^2) \quad (4-23)$$

ただし、 α_0 は推定値 $\hat{\alpha}$ の真値であり、 ε_j ($j=1, 2, \dots, n$) は測定値に重畳するノイズで、同一の分散 σ_n^2 をもち、平均値が零の white noise と考える。また、 λ_j, μ_{jk} は測定値の真値 β_k ($k=1, 2, \dots, n$) の関数として与えられるものである。そして、 $O(\varepsilon^2)$ を無視して、推定値の偏り β 、および分散 σ^2 は近似的に (4-24), (4-25) 式で求められる。

$$\beta \triangleq E[\hat{\alpha} - \alpha_0] \cong \sum_{i=1}^n \mu_{ii} \cdot \sigma_n^2 \quad (4-24)$$

$$\sigma^2 \triangleq E[(\hat{\alpha} - E[\hat{\alpha}])^2] \cong \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot \sigma_n^2 \quad (4-25)$$

この考え方を MLIM, NM, INM に適用すると、計算は相当複雑だが λ_j, μ_{jk} を求めることが出来る。

つぎに、いくつかの例題についての MLIM と NM, INM の各方法による

計算機シミュレーションの結果と、(4-24), (4-25)式の近似式による計算値との比較を以下に示す。

5 表4-1. は特性根が実根の場合で表から明らかなように、推定機構としての性能、すなわち、推定値の偏り、分散ともに INM の方が $MLIM$ よりすぐれていることがわかる。

10 表4-2. は特性根が複素根の場合で、大体実軸と $\pm \pi/5$ 以内の扇形内にある時は、推定値の偏り、分散ともに INM の方が $MLIM$ よりよいといえるが、 $\pm \pi/5$ を超えると逆転するようである。

15 つぎにパルス伝達関数のパラメータの推定値 $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ の分散による $MLIM$ と INM の推定機構としての良さの比較と z -平面上に図示したのが図4-2, 図4-3. である。図4-2. は (4-25)式の近似式による計算値(理論値)で、図4-3. は計算機シミュレーションの結果(実験値)である。シミュレーションは推定を100回行った時の推定値の分散により比較を行なった。両図とも、図の曲線と実軸でかこ

20 いた扇形内が INM の方がすぐれている領域である。

表、図とも、非常に小さな値になる場合を除いて、近似式による計算値(理論値)とシミュレーションの結果(実験値)とは十分よく一致を示していることもわかる。

30 つぎに、 z -平面上で半径 r を固定し、(系の減衰定数を一定にして)実軸からの角度 θ による推定誤差(推定値の分散)の比較を示したのが図4-4. ~ 図4-7. である。図4-4, 4-5. は $r=0.7$ の場合、

図4-6, 4-7. は $r=0.9$ の場合である。

以上のグラフから, INMはMLIMとは特性不良の実軸からの角度に対して非常に対称的な特性ともっていることが分かる。つまり, MLIMは
5 系の振動周期が極端に短かく, サンプリング定理が問題になる程ではないが, 系の振動性に対して一定か, むしろ振動的な程, 推定性能がよいことを表わしている。

一方, INMは逆に サンプリング周期にくらべ, 系の振動周期が極
10 端に大きくないが, 系が振動的になる程, 推定性能が悪くなることを表わしている。両者の交差がほぼ, $\theta=\pi/5$ 付近 といえる。

ここで, 特性根の実軸からの角度 θ とインパルス応答の振動周期
15 T , サンプリング周期 T_s との関係は S -平面と, Z -平面との対応から, (4-26)式で表わされるから,

$$T/T_s = 2\pi/\theta \quad (4-26)$$

20 $\theta=\pi/5$ のときは, $T/T_s=10$, つまり, インパルス応答の1周期中に10コのサンプル点があるようなサンプリングになっている。ところで, 実際問題としては, 特性根の位置が $\pm\pi/5$ 以上, 換言すれば, インパ
25 ス応答の1周期中のサンプル点が10個以下のように非常に振動的な系の推定はまれであり, また, そのような場合にもサンプリング周期と短かくて, 算術的に振動性の少ない系にして推定するのが普通
30 であるから, 実用的には INMがすぐれているといえる。

表4-1. 計算機シミュレーションの結果と近似式による計算値とによる

MLIMとNMの比較 (特性根: 実根)

試行回数: $n=2000$, *: 計算値

Standard Deviation of Noise	Method	Bias of Estimate		Standard Deviation	
		α_1	α_2	σ_1	σ_2
True Values of α_i		-1.6000	0.6300	0.0000	0.0000
$\sigma_n = \frac{0.25}{\sqrt{3}}$	MLIM	0.2358	-0.2399	0.0193	0.0209
	MLIM*	0.2496	-0.2542	0.0116	0.0129
	NM	-0.0024	0.0089	0.0069	0.0144
	NM*	-0.0028	0.0075	0.0067	0.0140
$\sigma_n = \frac{0.50}{\sqrt{3}}$	MLIM	0.5596	-0.5639	0.0497	0.0537
	MLIM*	0.9985	-1.0169	0.0465	0.0574
	NM	-0.0224	0.0490	0.0328	0.0706
	NM*	-0.0110	0.0299	0.0268	0.0561
True Values of α_i		-1.0100	0.1800	0.0000	0.0000
$\sigma_n = \frac{0.05}{\sqrt{3}}$	MLIM	0.0089	-0.0085	0.0014	0.0015
	MLIM*	0.0094	-0.0089	0.0012	0.0013
	NM	-0.0007	0.0007	0.0010	0.0008
	NM*	0.0005	-0.0004	0.0011	0.0009
$\sigma_n = \frac{0.10}{\sqrt{3}}$	MLIM	0.0392	-0.0375	0.0053	0.0055
	MLIM*	0.0375	-0.0355	0.0049	0.0051
	NM	-0.0006	-0.0003	0.0045	0.0034
	NM*	0.0018	-0.0016	0.0044	0.0035

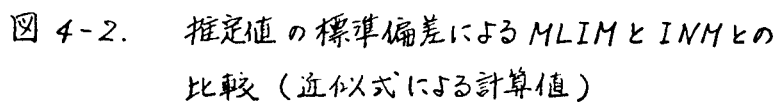
表4-2. 計算機シミュレーションの結果と近似式による計算値とによる

MLIM と INM との比較 (特性根: 複素根)

試行回数: $n=1000$, *: 計算値

ノイズの標準偏差: $\sigma_n = 0.01$, $r = 0.7$ ($z = r e^{j\theta}$)

Angular from Real Axis	Method	Bias of Estimate		Standard Deviation	
		α_1	α_2	σ_1	σ_2
$\theta = \pi/20$	MLIM	0.00906	-0.00855	0.02117	0.01904
	MLIM*	0.00990	-0.00940	0.02114	0.01892
	INM	0.00027	-0.00017	0.00569	0.00563
	INM*	0.00016	-0.00001	0.00549	0.00561
$\theta = 3\pi/20$	MLIM	0.00820	-0.00714	0.02051	0.01597
	MLIM*	0.00842	-0.00722	0.02022	0.01556
	INM	0.00062	-0.00025	0.00996	0.00894
	INM*	0.00034	-0.00002	0.00990	0.00895
$\theta = 5\pi/20$	MLIM	0.00637	-0.00472	0.01880	0.01074
	MLIM*	0.00698	-0.00503	0.01861	0.01063
	INM	0.00134	-0.00424	0.02454	0.01900
	INM*	0.00065	-0.00472	0.02451	0.01852
$\theta = 7\pi/20$	MLIM	0.00390	-0.00239	0.01642	0.00742
	MLIM*	0.00450	-0.00243	0.01686	0.00744
	INM	0.00221	0.00047	0.05391	0.04016
	INM*	0.00078	0.00026	0.05464	0.04001



1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 26

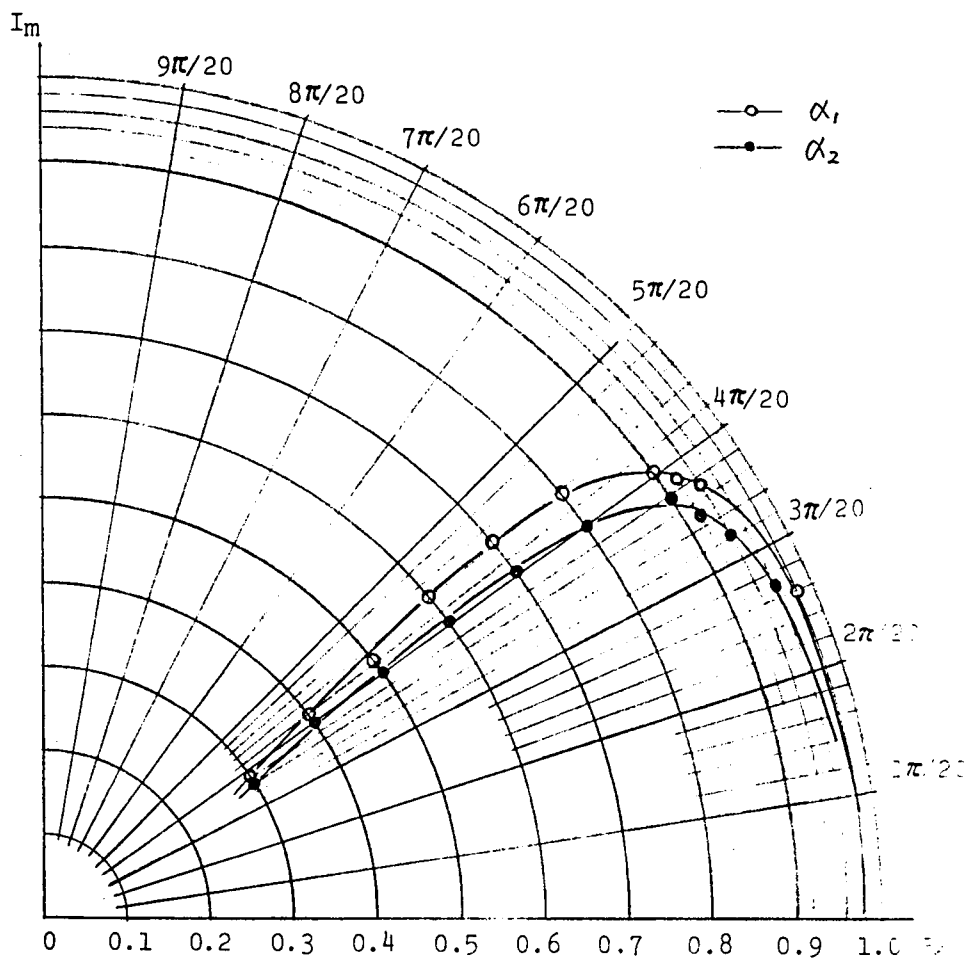


図4-3. 推定値の標準偏差によるMLIMとINMとの比較 (計算機シミュレーションの結果)

ノイズの標準偏差	$\sigma_n = 0.01$
サンプル個数	$N = 20$
推定試行回数	$n = 100$

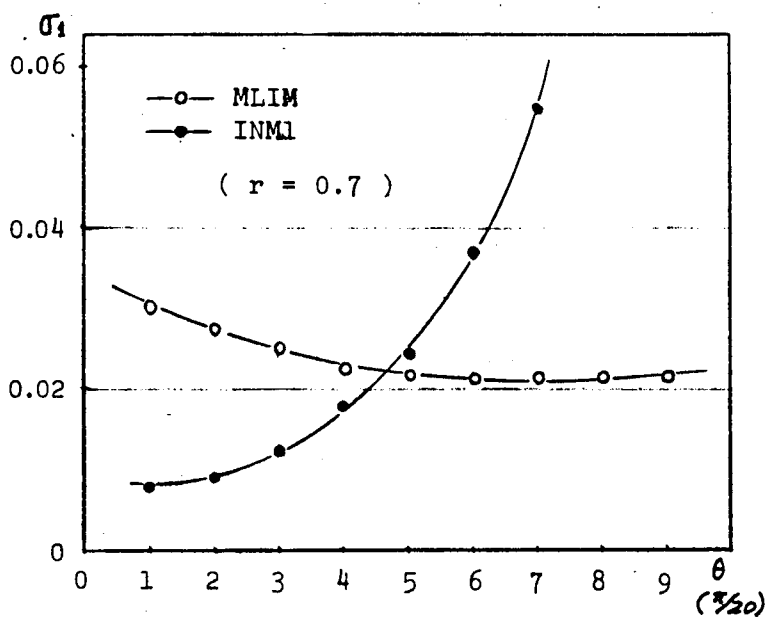


図4-4. Z平面における実軸からの角度に
 対する α_1 の推定誤差
 ($Z = r \exp(j\theta)$, $r = 0.7$ の場合)

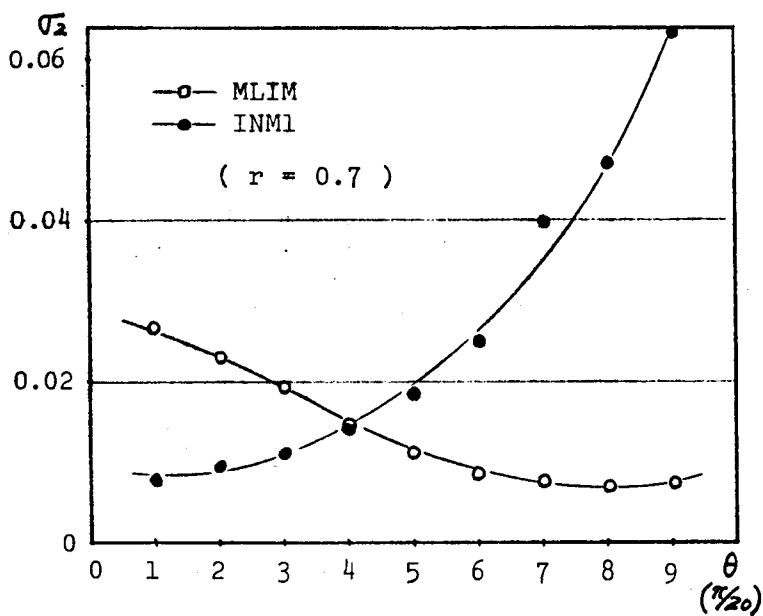


図4-5. Z-平面における実軸からの角度に
 対する α_2 の推定誤差
 ($Z = r \cdot \exp(j\theta)$, $r = 0.7$ の場合)

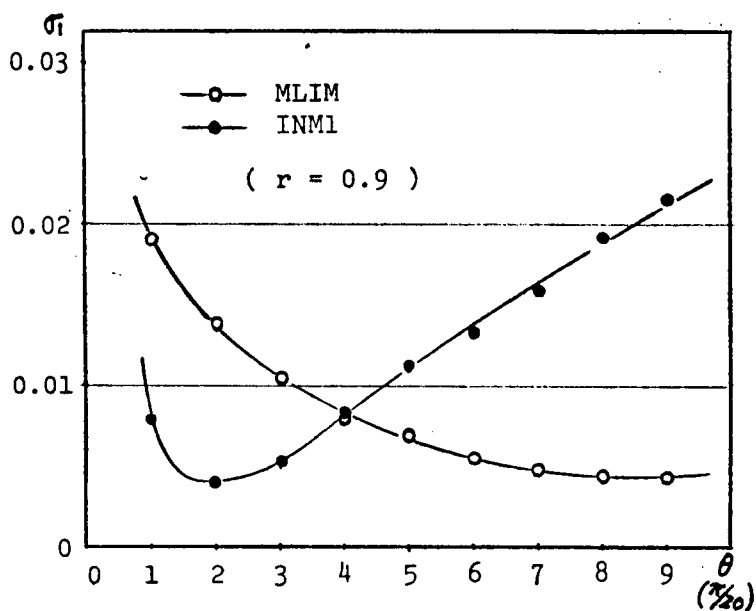


図4-6. Z-平面における実軸からの角度に
 対する α_1 の推定誤差
 ($Z = r \cdot \exp(j\theta)$, $r = 0.9$ の場合)

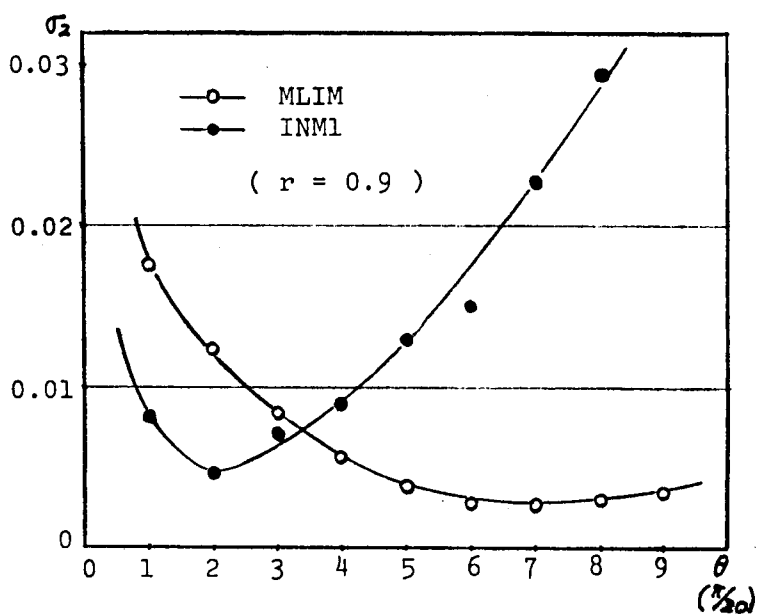


図4-7. Z-平面における実軸からの角度に
 対する α_2 の推定誤差
 ($Z = r \cdot \exp(j\theta)$, $r = 0.9$ の場合)

§4.7. サンプリング周期と推定誤差

z -平面上での特性根の位置とサンプリング周期との関係と考える。

5 5. サンプリング周期 T_s のときの特性根が、(4-27)式で表わされると
考えると、

$$z = r \cdot \exp(j\theta) \quad (4-27)$$

サンプリング周期 T_s/n のときの特性根は等価的に次式のようになる。

$$10 \quad z_n = \sqrt[n]{r} \cdot \exp(j \cdot \theta/n) \quad (4-28)$$

15 1. したがって、サンプリング周期を $T_s \rightarrow T_s/n$ とすることにより、半径
は $\sqrt[n]{r}$ と少し大きくなるが、 θ が θ/n となり、図4-2, 4-3.で

20 示した INM の方が劣っている領域のかなりの部分と INM のすぐれ
ている領域にもってくることが出来ることが分かる。

25 ところで、サンプリング周期は小さくすればする程推定誤差は小さく
なるように思われるが実際には、サンプル個数が有限であるから、
どこかに最適なサンプリング周期が存在することになる。

30 そこで、サンプル個数をパラメータとしてサンプリング周期を変化したとき
の MLIM と INM による推定誤差を検討した。

25 図4-8. は サンプル数が 10 個, 20 個, 40 個 の場合の INM
による推定誤差を表わしている。図4-9. は 同じく、サンプル数が 10 個,
20 個, 40 個 の場合の MLIM による推定誤差を表わしている。

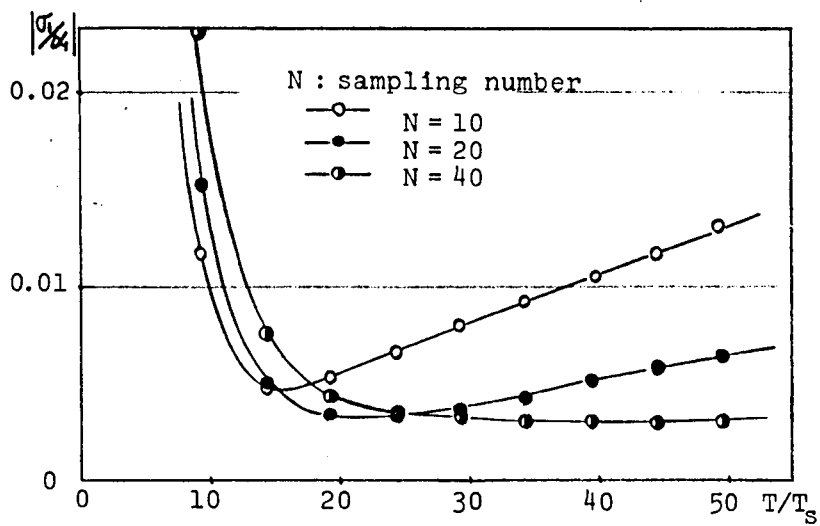
30 図の説明に、 $\theta/\omega = \tan 27^\circ$ 、とあるのは、系の特性根が、

S-平面上で、 $S = -\delta \pm j\omega$ と表わされると考え、インパルス応答の
1周期当りの減衰を表わす量とは、 δ/ω と考えられる。 $\delta/\omega = \tan 27^\circ$
となる場合のインパルス応答は図4-11.(a)に示す。また、図の横軸： T_s
はインパルス応答の1周期中に入るサンプル数を表わしている。(T:インパ
ルス応答の周期, T_s :サンプリング周期) 図の縦軸： $|\sigma/\alpha_i|$ (i=1,2)
は、サンプリング周期と変えれば、その系は同じでも、パルス伝達関数
が、1つ違って、そのパラメータ α_i も変わるので、推定誤差のサンプリング
周期による影響を考慮のため、単にその時の α_i の分散の大きさだけ
でなく α_i で正規化した量で比較することにした。

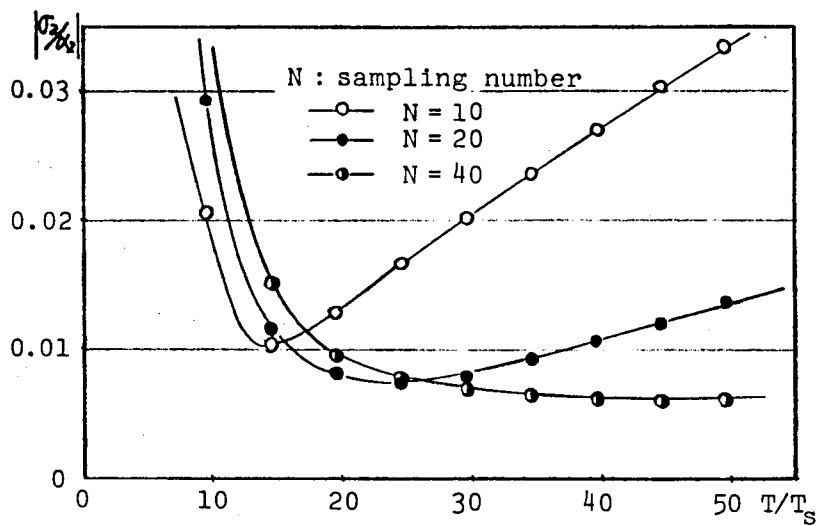
さて、図4-8, 4-9. から、サンプル個数: $N=10$ の場合は、その
系に対して丁度適当なサンプリング周期になっていると、サンプル個数が
多い場合に比べて、それ程悪くはないが、系の動特性が時間と
ともにゆっくりと変動するような場合も想定しているので、最適なサン
プリング周期から、少しずれても推定誤差に大きくひびくので、都合
が悪く思われる。それに対して、 $N=20$ の場合は、最適なサン
プリング周期のあたりでかなりフラットになっている。しかも、装置
の点でもそれほど大変でもないと思われるので、以後 $N=20$ の場合につ
いて検討している。 $N=40$ の場合は、 $N=10$, $N=20$ よりも確
かによいが、 $N=20$ に比べそれ程性能が改善されるわけでも
ないので cost の点で不適と思われる。また、これらのグラフより、
最適サンプリング周期はほぼインパルス応答の1周期から1.5周期

の間、すべてのサンプル長が入る程度のサンプリング周期になっていることが
合かる。

図4-10. ~ 図4-12. は、いずれもサンプル数: $N=20$ に固定して、
系の特性が、 $\delta/\omega = \tan 15^\circ$, $\tan 27^\circ$, $\tan 39^\circ$ の場合に対
して、サンプリング周期を変えた時の MLIM と INM による推定誤差
の比較を表わしたものである。いずれも、(a)図に、推定のためのデ
ータと見られるインパルス応答のサンプル値を示し、(b)図に α_1 , (c)図に α_2
の推定誤差を示している。これから、系の特性が変わると、最適
サンプリング周期も変化し、グラフの様子も変わるが、ほぼ同じお
な傾向になることが合かる。

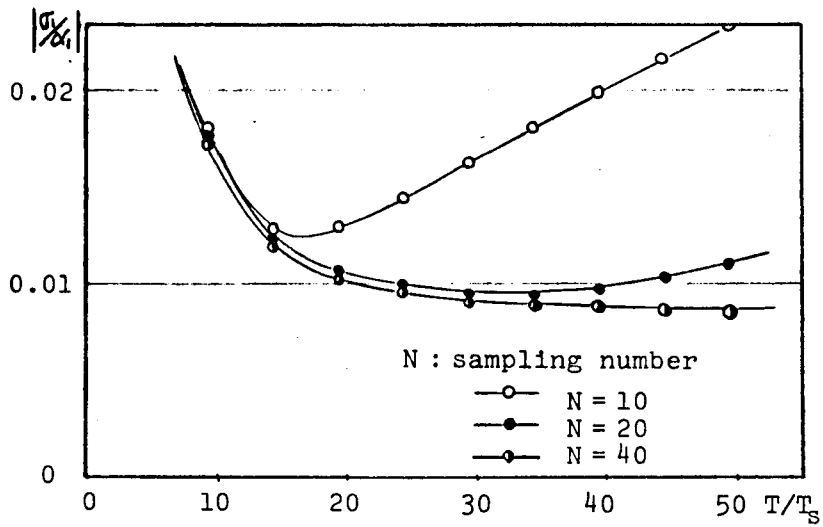


(a) サンプル個数とパラメータ α_1 の推定誤差

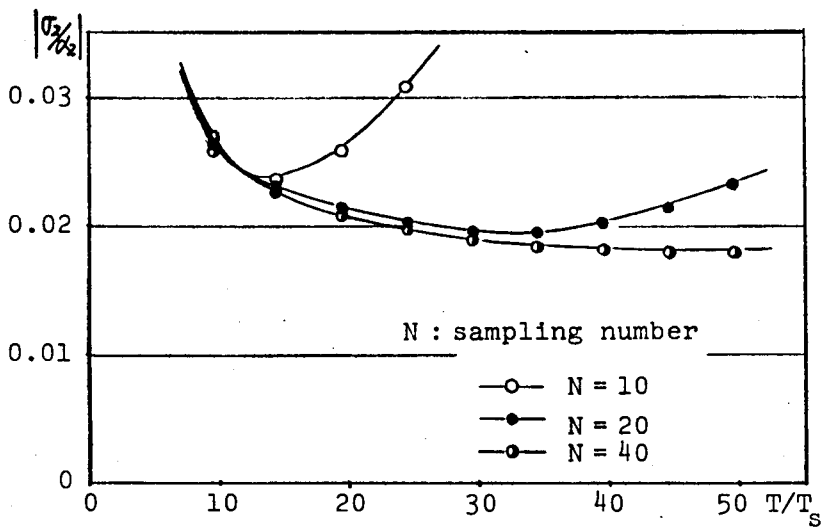


(b) サンプル個数とパラメータ α_2 の推定誤差

図4-8. サンプル個数とINMによる
推定誤差
($\delta/\omega = \tan 27^\circ$ の場合)

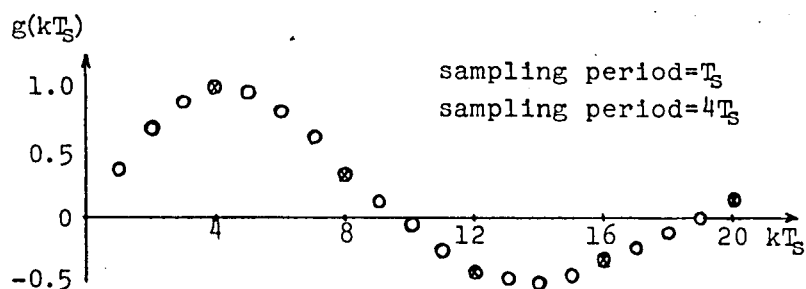


(a) サンプル個数とパラメータ α_1 の推定誤差

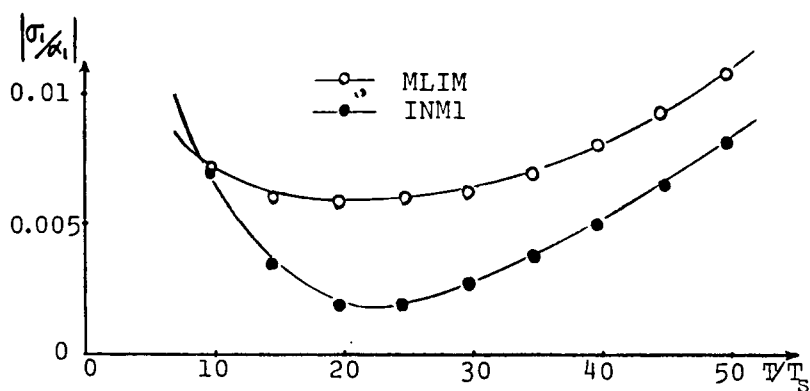


(b) サンプル個数とパラメータ α_2 の推定誤差

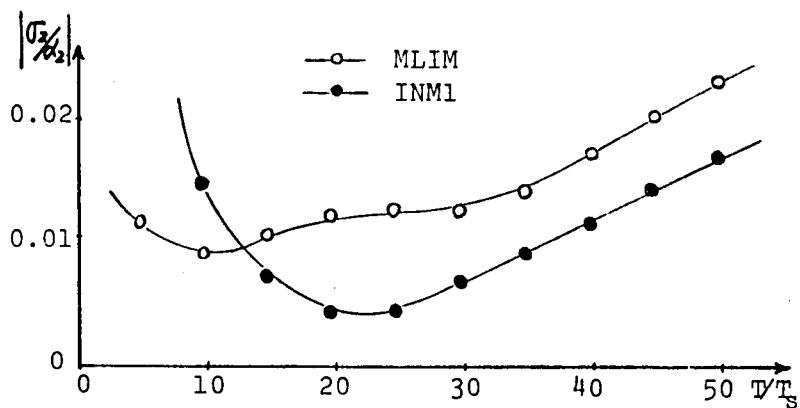
図4-9. サンプル個数とMLIMによる
推定誤差
($\delta/\omega = \tan 27^\circ$ の場合)



(a) 推定のためのデータとして与えられるインパルス応答のサンプリング値 ($\delta/\omega = \tan 15^\circ$ の場合)

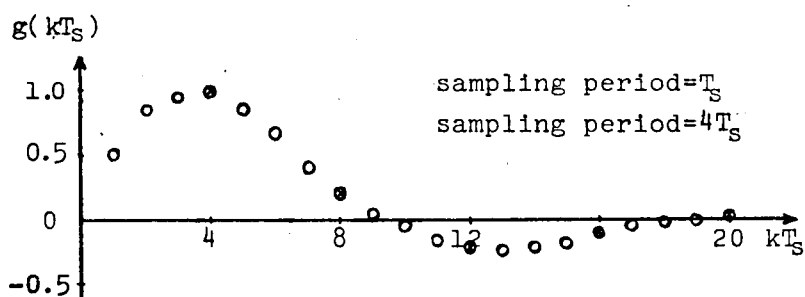


(b) パラメータ α_1 の推定誤差

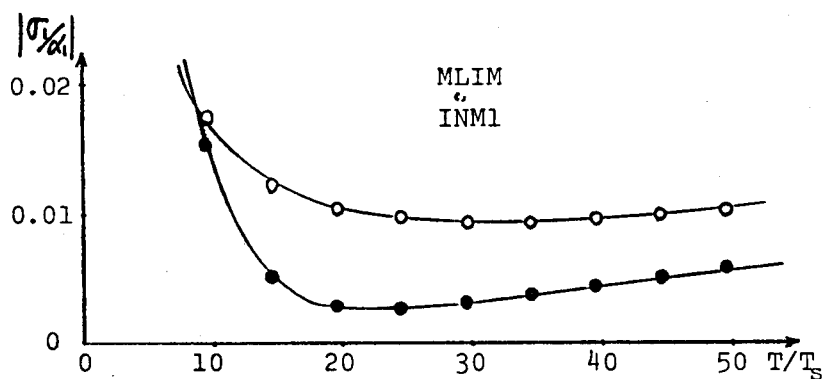


(c) パラメータ α_2 の推定誤差

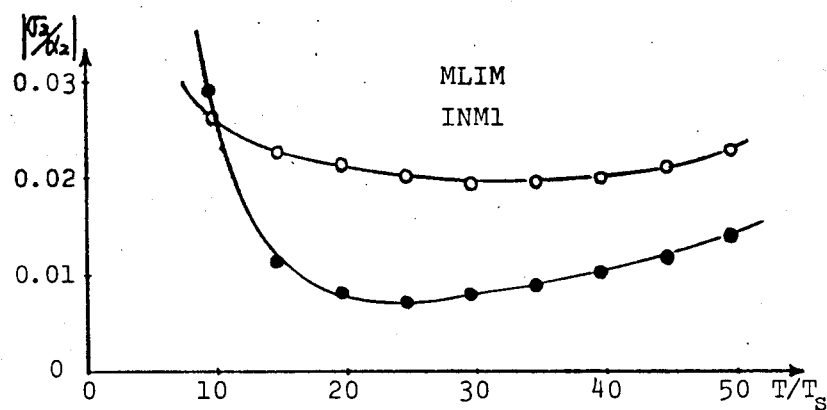
図 4-10. サンプリング周期を変えた時の推定誤差 ($\delta/\omega = \tan 15^\circ$, $N=20$ の場合)



(a) 推定のためのデータと与えらるインパルス応答のサンプル値 ($\delta\omega = \tan 27^\circ$ の場合)

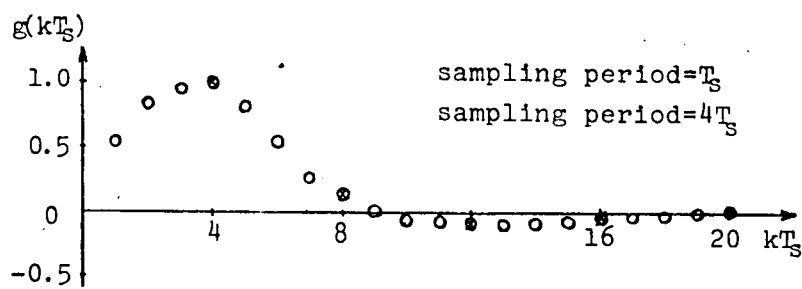


(b) パラメータ α_1 の推定誤差

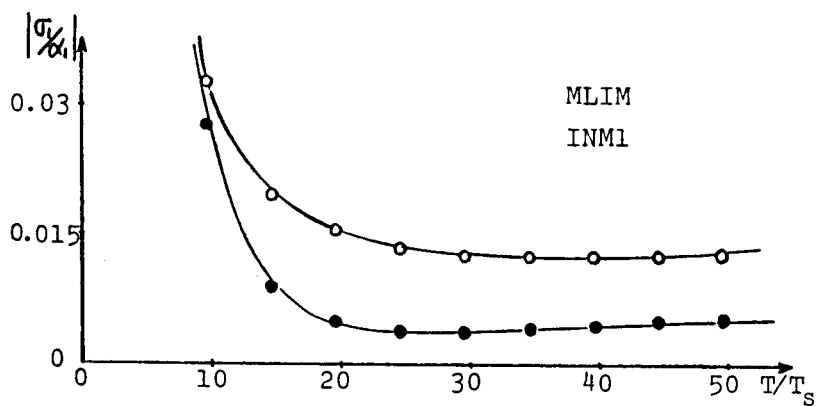


(c) パラメータ α_2 の推定誤差

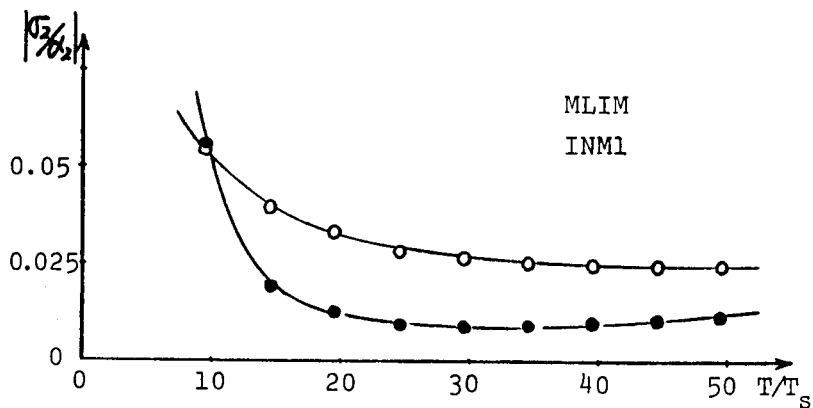
図4-11. サンプリング周期を変えた時の推定誤差
($\delta\omega = \tan 27^\circ$, $N=20$ の場合)



(a) 推定のためのデータと与えられるインパルス応答のサンプル値 ($\delta/\omega = \tan 39^\circ$ の場合)



(b) パラメータ α_1 の推定誤差



(c) パラメータ α_2 の推定誤差

図4-12. サンプリング周期を変えた時の推定誤差 ($\delta/\omega = \tan 39^\circ$, $N = 20$ の場合)

第5章 パラメータ推定における準最適重み⁴⁰⁾

§5.1 序

5 本章において制御対象のパルス伝達関数を二次系で近似し、そのパラメータをその系のインパルス応答を用いて推定する方法を提案した。これはインパルス応答のサンプル値の測定値をいくつかの組に分けて、パラメータを推定し、さらに適当な重みをつけて平均する方法（特にINM）である。

10 その際の重みの選定に対する理由づけは定性的なものでしかなかった。そこで本章では、推定値の分散最小という意味での準最適重みをかなり一般的に導出し、先に提案したINMで適用している重みがこの観点からどの程度のものであるかを検討した。

15 ところで、ここで扱おうとしているのは次のような問題である。

何かあるパラメータを有限個のノイズを含んだ測定値から推定したいということがある。そして

そのパラメータはそれら測定値の関数になっていて、その関数は与えられている。もし、測定値にノイズがなければ、そのパラメータの値は正確にその関数から計算できる。しかし実際

20 には測定値にはノイズが必ずあるために、パラメータの推定値に誤差を生ずる。

このような場合、普通何回か測定を行ない、それぞれ測定において得た推定値（以後オI推定値と呼ぶ）を何らかの意味で平均して最終的な推定値を得ることを

25 を行なう。ここでは、オI推定値の重み付き平均により最終的な推定値を得ることを

30 考えている。その際、与えられたデータから出来るだけ良い最終的な推定値を得るにはその重みを適当に選ぶ必要がある。ここで“良い”というのは、推定値の分散が出来るだけ小さいことを意味している。したがってここでは推定値の分散を最小にするような重みを最適重みと呼ぶことにする。

一般には、そのような最適重みを正確に求めることはむずかしい。しかし、オI推定値を計算する推定式(以後オI推定式と呼ぶ。)が特別な形をしているときには、そのような最適重みを近似的に求めることが出来る。すなわち、準最適重みを得ることが出来る。

ここでは、オI推定式が、分母、分子とも測定値の一次式で与えられる場合、分母、分子とも測定値の二次式で与えられる場合について検討した。

3.2 オI推定式が1次式の場合

[定理1]

(5-1)式に示すようなオI推定式で分母、分子が測定値の1次式で表わされていて、各国の測定値にもとづいた推定値(オI推定値)に適當な重みをつけて平均し、最終的な推定値を得るとき、推定値の分散最小という意味で現実を利用出来る準最適重み(仮定A)、[仮定B]のもとでは、オI推定式の分母の2乗に比例する重みである。

$$\hat{\theta}_i = \frac{\sum_{j=1}^m b_j (y_{ji} + \delta_{ji})}{\sum_{j=1}^m a_j (x_{ji} + \varepsilon_{ji})} \quad (5-1)$$

ただし、

$\hat{\theta}_i$: i回目の測定によるオI推定値

a_j, b_j : i回目の測定に無関係な定数

x_{ji}, y_{ji} : i回目の測定における測定値の真値

$\varepsilon_{ji}, \delta_{ji}$: i回目の測定における測定値に含まれるノイズ

[仮定A]

各測定値に含まれるノイズは、分母、分子それぞれ同一分散、 $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\delta^2$ をもち、平均値零で互いに無相関とする。

5

[仮定B]

分母、分子をそれぞれ、ノイズについて展開したとき、ノイズの2次以上の項は、真値の2乗和に比べて無視出来るものとする。

10

[証明]

まず、測定は n 回行なうものとし、

次に推定式の分母に注目して、(5-2)式に示すような重み、 W_i を考える。

15

$$W_i \triangleq \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^m a_j (x_{ji} + \varepsilon_{ji}) \quad (5-2)$$

ここで、 i は i 回目の測定を示す添字。

λ_i は一般には、測定値の関数である。

20

いま、(5-1)式の $\hat{\theta}_i$ に (5-2)式の W_i を乗じて平均することにより、最終的な推定値 $\hat{\theta}$ を得るものとする。すなわち、(5-3)式により $\hat{\theta}$ を得るものとする。

25

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^m b_j (y_{ji} + \delta_{ji})}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^m a_j (x_{ji} + \varepsilon_{ji})} \quad (5-3)$$

[仮定B]を用いて、(5-3)式を次式のように近似的に変形する。

30

$$\hat{\theta} \cong \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m b_j y_{ji}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m a_j x_{ji}} \left\{ \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m b_j \delta_{ji}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m b_j y_{ji}} \right) \cdot \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m a_j \varepsilon_{ji}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m a_j x_{ji}} \right) \right\} \quad (5-4)$$

つまり、[仮定A]を用いて、 $\hat{\theta}$ の分散 σ^2 を求め整理すると、

$$\sigma^2 \cong (\sigma_\delta^2 \cdot K^2 + \sigma_\varepsilon^2 \cdot \theta^2) \cdot \left(\sum_{j=1}^m a_j^2 \right) \cdot \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) / \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m a_j x_{ji} \right) \right\} \quad (5-5)$$

ただし、

$$\theta \triangleq \sum_{j=1}^m b_j y_{ji} / \sum_{j=1}^m a_j x_{ji} \quad (5-6)$$

(これは、相推定式において測定値のノイズのない場合であるから、パラメータの真値であり、 i に無関係な定数となる。)

$$K^2 \triangleq \sum_{j=1}^m b_j^2 / \sum_{j=1}^m a_j^2 \quad (5-7)$$

(5-5)式において変数 λ_i によって σ^2 が影響を受けるのは「」の部分であるから、これをPとおく。

$$P = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) / \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m a_j x_{ji} \right)^2 \quad (5-8)$$

上式を λ_i に関して微分して、 $\partial P / \partial \lambda_i = 0$ とみると、

$$\lambda_i = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m a_j x_{ji}} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m a_j x_{ji} \right) \quad (5-9)$$

(5-9)式の右辺の最初の()の中は i に無関係な定数になるのでこれを K とおくと、

$$\lambda_i = K \cdot \sum_{j=1}^m a_j \cdot x_{ji} \quad (5-10)$$

5 したがって、 λ_i が(5-10)式で示されるような値のとき、 P は最小、すなわち σ^2 は最小になる。このことは、又 λ_i を(5-10)式に選んだときの P の値を P_K とすると、

$$10 \quad P_K = 1 / \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_j x_{ji} \right)^2 \quad (5-11)$$

となり、一先 Schwarz の不等式から、

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_j x_{ji} \right)^2 \right\} \geq \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m a_j x_{ji} \right\}^2 \quad (5-12)$$

1 であるから、 $P \geq P_K$ となり、これによっても(5-10)式で示される λ_i のときが最適であることが分かる。

すなわち、(5-10)式の λ_i を(5-2)式に代入して得られる w_i が

$$20 \quad w_i = K \cdot \left(\sum_{j=1}^m a_j x_{ji} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m a_j (x_{ji} + \varepsilon_{ji}) \right) \quad (5-13)$$

$\hat{\theta}$ の分散 σ^2 を最小にする最適重みであることが分かる。

25 しかし、(5-13)式の右辺にある $\left(\sum_{j=1}^m a_j x_{ji} \right)$ は測定値の真値の和であるから、実際には使えないものであって、その測定値 $\left\{ \sum_{j=1}^m a_j (x_{ji} + \varepsilon_{ji}) \right\}$ を代用することになる。したがって、実際に利用出来る分散最小の意味での準最適重みは、

30 例1 推定式 $\hat{\theta}_i$ の分母の2乗に比例するような量である。

(証明終り)

§5.3 第1推定式が2次式の場合

[定理2]

(5-14)式に示すような第1推定式の分母,分子が測定値の2次式で表わされていて,各回の測定値にもとづいた推定値(第1推定値)に適當な重みをつけて平均し,最終的な推定値を得るとき,推定値の分散最小という意味で現実に利用出来る準最適重みは,〔仮定A〕,〔仮定B〕のもとでは,第1推定式の分母に比例する重みに, (5-23)式の補正係数と乘したものである。

$$\hat{\theta}_i = \frac{\sum_{j,k}^m b_{jk} (y_{ji} + \delta_{ji})(y_{ki} + \delta_{ki})}{\sum_{j,k}^m a_{jk} (x_{ji} + \varepsilon_{ji})(x_{ki} + \varepsilon_{ki})} \quad (5-14)$$

ただし,

$\hat{\theta}_i$: i 回目の測定による第1推定値

a_{jk}, b_{jk} : i 回目の測定に無関係な定数

x_{ji}, y_{ji} : i 回目の測定における測定値の真値

$\varepsilon_{ji}, \delta_{ji}$: i 回目の測定における測定値に含まれるノイズ

[証明]

〔定理1〕の証明と殆んど同じように行なう。

まず, 測定は n 回行なりものとし, 第1推定式の分母に注目して (5-15)式に示すような重み w_i を考える。

$$W_i = \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^m a_{jk} \cdot (x_{ji} + \varepsilon_{ji})(x_{ki} + \varepsilon_{ki}) \quad (5-15)$$

ここで、 i は i 回目の測定を示す添字であり、 λ_i は一般に測定値の関数である。

いま (5-14) 式の $\hat{\theta}_i$ に (5-15) 式の W_i を乗じて平均することにより、最終的な推定値 $\hat{\theta}$ を得るものとする。すなわち、(5-16) 式により $\hat{\theta}$ を得るものとする。

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^m b_{jk} (y_{ji} + \delta_{ji})(y_{ki} + \delta_{ki})}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^m a_{jk} (x_{ji} + \varepsilon_{ji})(x_{ki} + \varepsilon_{ki})} \quad (5-16)$$

上式に、[仮定B]を用いて、 $O(\varepsilon^2)$ 、 $O(\delta^2)$ を無視して変形し、次式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{\theta} \cong & \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^m b_{jk} y_{ji} \cdot y_{ki}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^m a_{jk} x_{ji} \cdot x_{ki}} \cdot \left\{ 1 + \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^m b_{jk} (y_{ji} \delta_{ki} + y_{ki} \delta_{ji})}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^m b_{jk} y_{ji} \cdot y_{ki}} \right\} \\ & \times \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^m a_{jk} (x_{ji} \varepsilon_{ki} + x_{ki} \varepsilon_{ji})}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^m a_{jk} x_{ji} \cdot x_{ki}} \right) \quad (5-17) \end{aligned}$$

つきに、[仮定A]を用いて、 $\hat{\theta}$ の分散 σ^2 を求め、整理すると、

$$\begin{aligned} \sigma^2 \cong & \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^m b_{jk} y_{ji} \cdot y_{ki}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^m a_{jk} x_{ji} \cdot x_{ki}} \right\}^2 \left\{ \frac{\sigma_\delta^2 \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot \left(\sum_{j,k}^m b_{jk}^2 (y_{ji}^2 + y_{ki}^2) + 2 \sum_{j=1}^m b_{jj}^2 y_{ji}^2 \right)}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^m b_{jk} y_{ji} \cdot y_{ki} \right)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot \left(\sum_{j,k}^m a_{jk}^2 (x_{ji}^2 + x_{ki}^2) + 2 \sum_{j=1}^m a_{jj}^2 x_{ji}^2 \right)}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j,k}^m a_{jk} x_{ji} \cdot x_{ki} \right)^2} \right\} \quad (5-18) \end{aligned}$$

ここで式を簡単にするための次のような文字を導入する。

$$A_i \triangleq \sum_{j,k}^m a_{jk} x_{ji} \cdot x_{ki}$$

$$B_i \triangleq \sum_{j,k}^m b_{jk} y_{ji} \cdot y_{ki}$$

$$\theta \triangleq B_i / A_i$$

(これは、(5-14)式において測定値にノイズのない場合であるから定数になる)

$$C_i \triangleq \sum_{j,k}^m a_{jk}^2 (x_{ji}^2 + x_{ki}^2) + 2 \sum_{j=1}^m a_{jj}^2 x_{ji}^2$$

$$D_i \triangleq \sum_{j,k}^m b_{jk}^2 (y_{ji}^2 + y_{ki}^2) + 2 \sum_{j=1}^m b_{jj}^2 y_{ji}^2$$

(5-19)

(5-18)式に(5-19)式を用いて整理すると、

$$\sigma^2 = \theta^2 \left\{ \sigma_\delta^2 \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 D_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i B_i \right)^2} + \sigma_\varepsilon^2 \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 C_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \right)^2} \right\}$$

(5-20)

さらに $B_i/A_i = \theta$ を代入して整理すると、

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 (\sigma_\delta^2 D_i^2 + \theta^2 \sigma_\varepsilon^2 C_i^2)}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \right)^2}$$

(5-20)'

(5-20)'式の両辺を、 λ_i について微分し、 $\partial \sigma^2 / \partial \lambda_i = 0$ とおいて整理すると、

$$\lambda_i = \left(\frac{A_i}{\sigma_\delta^2 D_i^2 + \theta^2 \sigma_\varepsilon^2 C_i^2} \right) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 (\sigma_\delta^2 D_i^2 + \theta^2 \sigma_\varepsilon^2 C_i^2)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i} \right)$$

(5-21)

さらに、簡単のため

$$E_i^2 \triangleq \sigma_\delta^2 \cdot D_i^2 + \theta^2 \sigma_\varepsilon^2 \cdot C_i^2 \quad (5-22)$$

を導入すると、

$$\lambda_i = (A_i / E_i^2) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot E_i^2 / \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot A_i \right) \quad (5-23)$$

ここで、 $(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot E_i^2 / \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot A_i)$ は i には無関係な定数であるから、これを

K とおくと、

$$\lambda_i = K \cdot (A_i / E_i^2) \quad (5-23)'$$

λ_i として (5-23) 式を選んだとき (5-20)' 式の σ^2 は最小になる。すなわち、(5-23) 式を (5-15) 式に代入して求める w_i が $\hat{\theta}$ の分散 σ を最小にする最適値である。

$$w_i = K \cdot (A_i / E_i^2) \cdot \sum_{j,k}^m a_{jk} (x_{ji} + \varepsilon_{ji})(x_{ki} + \varepsilon_{ki}) \quad (5-24)$$

次に、 A_i / E_i^2 が定数になるのはどのような場合かを考える。

第1推定式 $\hat{\theta}_i$ として次の (5-25) 式を考える。

$$\hat{\theta}_i = \frac{\sum_{j=1}^m (y_{ji} + \delta_{ji})^2}{\sum_{j=1}^m (x_{ji} + \varepsilon_{ji})^2} \quad (5-25)$$

(5.3.12)式について、(5.3.6)、(5.3.9)式より A_i, E_i^2 を求めると

$$A_i = \sum_{j=1}^{m'} x_{ji}^2 \quad (5-26)$$

$$E_i^2 = 4 \cdot \sigma_\delta^2 \cdot \sum_{j=1}^m y_{ji}^2 + 4 \cdot \theta^2 \cdot \sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum_{j=1}^{m'} x_{ji}^2 \quad (5-27)$$

$$\therefore A_i/E_i^2 = \frac{1}{4(\sigma_\delta^2 + \theta \cdot \sigma_\varepsilon^2) \cdot \theta} = \text{const.} \quad (5-28)$$

ただし

$$\theta \triangleq \sum_{j=1}^m y_{ji}^2 / \sum_{j=1}^{m'} x_{ji}^2 \quad (5-29)$$

したがって、オノ推定式 $\hat{\theta}_i$ が (5-26)式のような場合には、 A_i/E_i^2 が定数となり、 $\hat{\theta}_i$ の分散を最小にするような重みはオノ推定式の分母に比例するような重みであることが分かる。しかし一般には A_i/E_i^2 は i 回目の測定値に依存する量であるので、準最適重みは、分母に比例する重みに (A_i/E_i^2) 倍だけの補正を必要とする。

(証明終り)

5.4 実際問題への定理の適用

つぎに、§4.5で提案した INM1 において採用している重みを上記の観点から検討してみよう。

INM1 におけるオノ推定式 $\hat{\alpha}_1^{(k)}, \hat{\alpha}_2^{(k)}$ は分母、分子とも測定値の2次式であるから [定理2] の場合に一致してはいる。しかし、分母、分子の測定値に含まれる

ノイズが互いに独立という仮定が満足されないので厳密には適用出来ないのであるが、一応の目安として適用してみよう。

$$\hat{\alpha}_1^{(k)} = \frac{(g_1 + \varepsilon_1)(g_{2k} + \varepsilon_{2k}) - 2(g_k + \varepsilon_k)(g_{k+1} + \varepsilon_{k+1})}{(g_k + \varepsilon_k)^2} \quad (5-30)$$

$$\hat{\alpha}_2^{(k)} = \frac{-(g_1 + \varepsilon_1)(g_{2k} + \varepsilon_{2k}) + (g_k + \varepsilon_k)(g_{k+1} + \varepsilon_{k+1})}{(g_k + \varepsilon_k)(g_{k-1} + \varepsilon_{k-1})} \quad (5-31)$$

$\hat{\alpha}_1^{(k)}, \hat{\alpha}_2^{(k)}$ について、補正項 A_i/E_i^2 を求めてみる。

$$\begin{aligned} (A_k/E_k^2)_1 &= g_k^2 / \{ (g_1^2 + g_{2k}^2 + 4g_k^2 + 4g_{k+1}^2) + 4\alpha_1^2 g_k^2 \} \cdot \sigma_n^2 \\ &\neq \text{const.} \end{aligned} \quad (5-32)$$

$$\begin{aligned} (A_k/E_k^2)_2 &= g_{k-1} g_k / \{ (g_1^2 + g_{2k}^2 + g_k^2 + g_{k+1}^2) + \alpha_2^2 (g_{k-1}^2 + g_k^2) \} \sigma_n^2 \\ &\neq \text{const.} \end{aligned} \quad (5-33)$$

(5-32), (5-33) 式から分かるように、いずれも定数ではない。しかしいくつかの例について、(5-32), (5-33) 式を計算してみると、 k によりそれほど大きな差はなく、又その値が小さい所では、 α 推定式の方母の大きさも小さくなっており、全体としての重みも小さい所であるから、実際問題としては、 (A_i/E_i^2) の補正項は計算もめんどうであることから定数としてみなしてよいのではないかとと思われる。

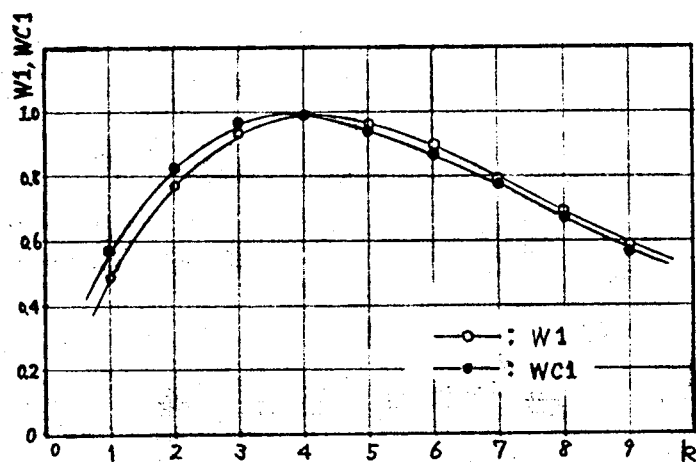
図 5-1., 5-2. に A_i/E_i を考慮した最適重みと, それと const. とした準最適重みの一例を示す. 図 5-1. は 特性根が 実根の場合で, (a) 図は パラメータ α_1 に関する重み, (b) 図は パラメータ α_2 に関する重みである. 図 5-2. は 特性根が 複素根の場合についての同様のグラフである. したがって, パラメータ α_1 に関しては殆んど最適重みと準最適重みは一致するようである. パラメータ α_2 に関しては少しずれるが、
10 実用的には問題がないように思われる.

15

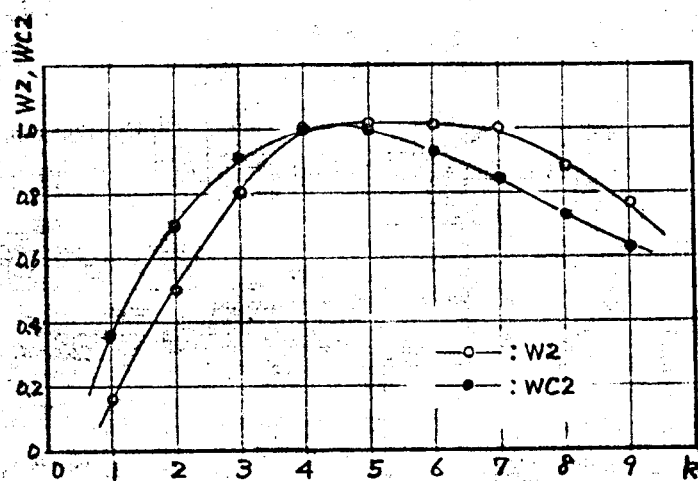
20

25

30

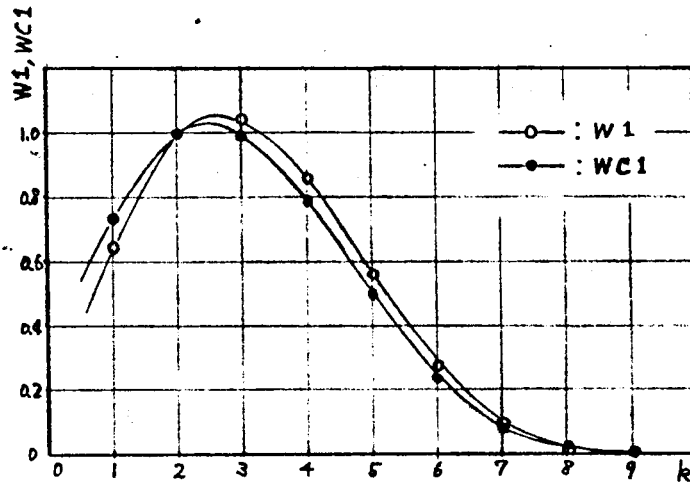


(a) パラメータ α_1 の最適重み ($W1$),
準最適重み ($WC1$)

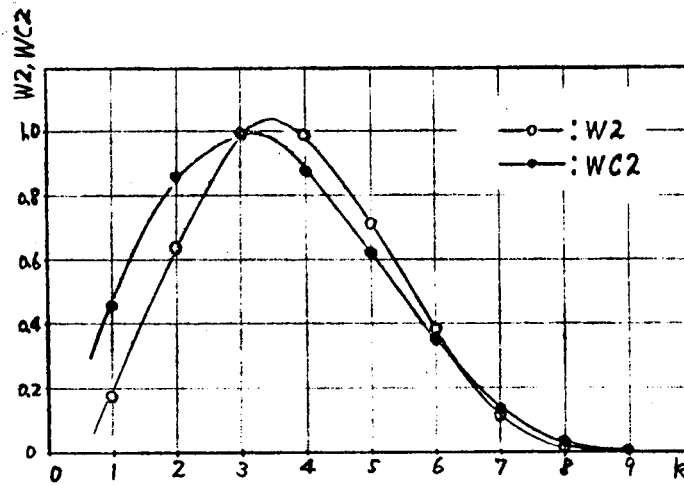


(b) パラメータ α_2 の最適重み ($W2$),
準最適重み ($WC2$)

図5-1. 最適重みと準最適重み
($z_1 = 0.9$, $z_2 = 0.7$)



(a) パラメータ α_1 の最適重み ($W1$),
準最適重み ($WC1$)



(b) パラメータ α_2 の最適重み ($W2$),
準最適重み ($WC2$)

図 5-2. 最適重みと準最適重み
($Z1, Z2 = 0.85 \cdot e^{\pm i\pi/6}$)

第6章 連続系と等価的離散値系

§6.1 序

前章の§4.6で推定法の比較を行なったが、これは制御系が2次系で推定の
ために仮定した系も2次系であって推定すべきパラメータの真値が存在してい
るので、推定法の良さに対する評価規範として真値からの偏りとかそのまわりの
分散を使用することが出来た。しかし、このような場合でもパラメータが複数個
あるので個々のパラメータについては評価規範が考えられても全体としては
よくわからない場合もある。また、推定すべき制御系が2次系でない場合
にはパラメータの真値が存在しないので、§4.6で用いたような評価規範は用い
ることが出来ない。したがって、推定法の良否はその推定により得られた情報
を用いていかにより制御性能が得られるか、すなわち、制御系全体としての評
価規範により、推定法の良否を決定しなければならない。しかも、その
評価は推定により得られるのがパルス伝達関数であるから、離散値系の
みで行ないたい。また、それがもとの連続系にもあてはまるもので
なければならぬ。

したがって、実際の連続系とそれにある意味で等価な離散
値系の関係と調べる必要がある。すなわち、単に微分を差分に、積分
を和に置き換えるような操作だけでは等価な関係が得られず、非常に
簡単な例でも本質的な違いのあることを示す。また、どのような考慮をばらえは
等価な関係が得られるかを制御装置として可変ゲインを選んだ簡単な
場合について検討した。そして、そのような関係を導く評価規範によって得られる

最適ゲインを古典的制御論より得られる推奨値との関係から論じている。
さらに、この評価規範によるMLIMとINMの推定機構としての良さ
の比較を行なう。

5

10 §6.2 連続系と離散値系におけるパラメータの関係

いま、推定すべき連続系の制御対象の伝達関数 $G(s)$ が次式で表
わされているような 2 次系を考える。

$$15 \quad G(s) = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} \quad (6-1)$$

このパラメータ a, b, A, B は推定のために仮定した離散値系における
パルス伝達関数 $G_d(z)$ のパラメータ α_i ($i=1, 2, 3$) の推定値から
決めるものとする。ただし、 $G_d(z)$ としては、前章で述べた次式を
20 用いる。

$$25 \quad G_d(z) = \frac{\alpha_3 z^{-1}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}} \quad (6-2)$$

さて、 $G(s)$ と $G_d(z)$ のパラメータの関係を求めてみる。

$G(s)$ を離散値系のパルス伝達関数に等価変換したものを $G^*(z)$ と
おくと、

30

$$\begin{aligned}
 G^*(z) &= \frac{A}{1-z^{-1}e^{-aT_s}} + \frac{B}{1-z^{-1}e^{-bT_s}} \\
 &= \frac{(A+B) - (Ae^{-bT_s} + Be^{-aT_s})z^{-1}}{1 - (e^{-aT_s} + e^{-bT_s})z^{-1} + e^{-aT_s}e^{-bT_s}z^{-2}} \quad (6-3)
 \end{aligned}$$

(ただし, T_s はサンプリング周期である。)

ここで直達分がない場合と考えると,

$$A+B=0 \quad \therefore B=-A$$

であるから $G^*(z)$ は次式のようになる。

$$G^*(z) = \frac{A(e^{-aT_s} - e^{-bT_s})z^{-1}}{1 - (e^{-aT_s} + e^{-bT_s})z^{-1} + e^{-(a+b)T_s}z^{-2}} \quad (6-4)$$

(6-2), (6-4)式と比較して,

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_1 &= -(e^{-aT_s} + e^{-bT_s}) \\
 \alpha_2 &= e^{-(a+b)T_s} \\
 \alpha_3 &= A(e^{-aT_s} - e^{-bT_s})
 \end{aligned} \right\} \quad (6-5)$$

すなわち,

$$\left. \begin{aligned}
 a &= (1/T_s) \cdot \ln \{ (-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2})/2 \} \\
 b &= (1/T_s) \cdot \ln \{ (-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2})/2 \} \\
 A &= \alpha_3 / \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}
 \end{aligned} \right\} \quad (6-6)$$

(ただし, $b > a$ とする。)

なれ、このとき (6-1) 式は次のように書ける。

$$G(s) = \frac{A(b-a)}{(s+a)(s+b)} \quad (6-7)$$

5 (ただし、 A, a, b は (6-6) 式より与えられるもの。)

§6.3 連続系の評価規範と最適ゲイン

10 (6-7) 式の $G(s)$ を用いて、図 6-1. のようなシステムを構成したとき、
システム全体の評価規範 (以後 *Performance Index* の略 *P.I.*
を用いる) が最小となるようなゲイン k_c の最適値、すなわち、最適ゲイン k_{co} を
15 求める問題を考える。

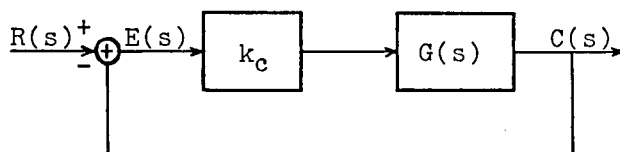


図 6-1. 連続系 ($G(s)$: 推定により得られる等価的 2 次系)

25 ここで、*P.I.* としてどのようなものを選ぶかが問題となる。

一般に、*P.I.* としては *indicial* 応答とその定常値との差の 2 乗積分が
よく用いられている。 図 6-2. に 図 6-1. のシステムの *indicial*
30 応答の概念図を示す。

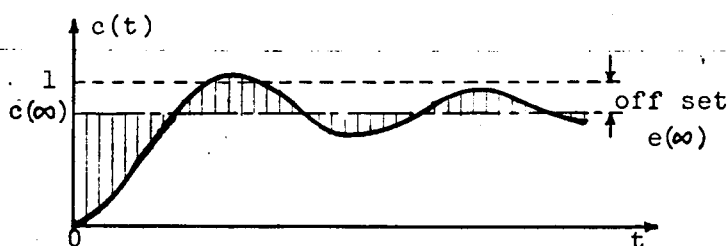


図 6-2. 連続系の indicial 応答の概念図

図 6-2. において縦線をほどこした部分の 2 乗積分が上述の P.I. であるから、これを PCI' とすると、次式のようになる。

$$PCI' = \int_0^{\infty} \{c(\infty) - c(t)\}^2 dt = \int_0^{\infty} \{e(t) - e(\infty)\}^2 dt$$

(6-8)

この P.I. では、制御装置のゲインが 0 のとき最適となるような Trivial な結果が得られる。したがって、 $C(t)$ を $C(\infty)$ で正規化する必要がある。

$$\begin{aligned} \frac{C(\infty) - C(t)}{C(\infty)} &= \frac{\{1 - e(\infty)\} - \{1 - e(t)\}}{1 - e(\infty)} \\ &= \frac{e(t) - e(\infty)}{1 - e(\infty)} \end{aligned}$$

(6-9)

であるから、このように正規化した P.I. を PCI とすると、

$$PCI = \frac{1}{\{1 - e(\infty)\}^2} \int_0^{\infty} \{e(t) - e(\infty)\}^2 dt$$

(6-10)

このとき、 $e(\infty)$ は s 領域の最終値定理より

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = ab/(ab + K_c) \quad (6-11)$$

$$\text{したがって, } K_c \triangleq A(b-a) \cdot k_c \quad (6-12)$$

そこで $PC1$ を求めよう。

そこで

$$\begin{aligned} F(s) &= E(s) - e(\infty) \cdot 1/s \\ &= \frac{K_c}{ab + K_c} \cdot \frac{s + (a+b)}{(s+a)(s+b) + K_c} \end{aligned} \quad (6-13)$$

を考える。ただし $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] \triangleq f(t) = e(t) - e(\infty)$

t, s 領域での Parseval の等式は

$$\int_0^{\infty} \{f(t)\}^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot F(-s) ds \quad (6-14)$$

であるから

$$y_1 \triangleq \int_0^{\infty} \{f(t)\}^2 dt = \sum_{F(s) \text{ のすべての極について}} \text{Residues} [F(s) \cdot F(-s)] \quad (6-15)$$

を計算すると、

$$y_1 = \left(\frac{K_c}{ab + K_c} \right)^2 \cdot \frac{\{(a+b)^2 + (ab + K_c)\}}{2(ab + K_c) \cdot (a+b)} \quad (6-16)$$

また

$$\frac{1}{\{1 - e(\infty)\}^2} = \left(\frac{ab + K_c}{K_c} \right)^2 \quad (6-17)$$

であるから、

$$PC1 = \frac{(a+b)}{2(ab+K_c)} + \frac{1}{2(a+b)} \quad (6-18)$$

となる。これを図示すると、図 6-3. のようになる。

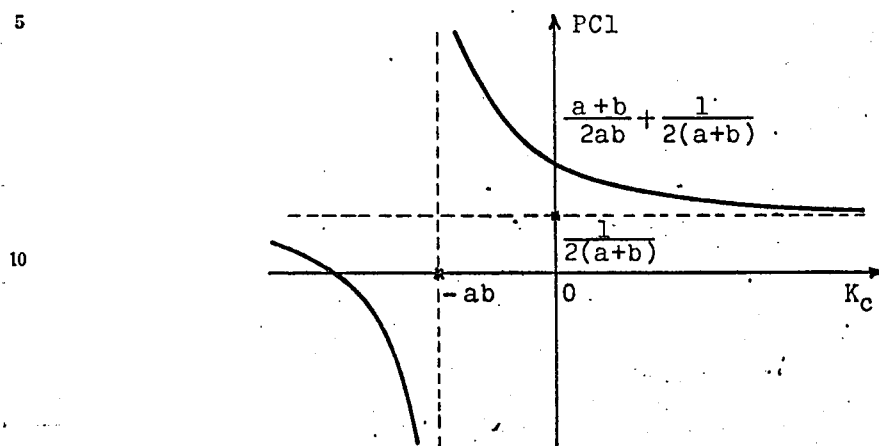


図 6-3. $PC1$ と K_c との関係

(6-18)式 あるいは 図 6-3. より 明らかなように、P.I.として $PC1$ を選んだときの最適ゲインは存在しない。

これは、(6-13)式の $F(s)$ あるいは 時間領域での $f(t)$ を考えるとよく分かる。 $F(s)$ の極を S_1, S_2 とすると、

$$S_1, S_2 = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{D}}{2} \quad (6-19)$$

ただし、 $D = (a+b)^2 - 4(ab+K_c)$

であるから、ゲイン K_c がある程度以上大きいと系は振動的になるが、 K_c は振動周期にのみ影響し、系の減衰には関係しないので上述のことは物理的にもうなすける。

したがって、P.I.として $PC1$ を選ぶと、系が振動的になるはなるほどよい

ということになって実際問題としては不都合になり、P.I.としては望ましくない。

そこで、P.I.として、系の応答の変化の速さに関する項を考慮に入れる

5 必要が生ずる。そのために (6-20) 式に示すような (6.3.3) 式における
と同じ正規化による出力の微分値の2乗積分 $PC2'$ を考える。

$$PC2' = \frac{1}{\{1-e(\infty)\}^2} \int_0^{\infty} \{\dot{e}(t) - \dot{e}(\infty)\}^2 dt \quad (6-20)$$

10 通常 $\dot{e}(\infty) = 0$ である。

$PC1$ と同じようにして、 $PC2'$ を計算して次式を得る。

$$15 \quad PC2' = \frac{ab + K_c}{2(a+b)} \quad (6-21)$$

これを図示すると、図 6-4. のようになる。

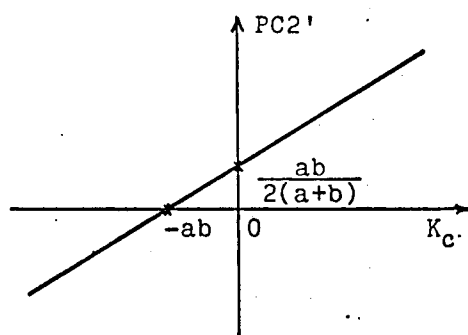


図 6-4. $PC2'$ と K_c の関係

20 この $PC1$ と $PC2'$ は K_c に関して逆傾向にあるのでこの両者を適当な
割合で組合せたものを P.I. にすることを考える。

30 $PC2'$ に重み W をつけたものを $PC2$ とし、最終的な P.I. として結局、次式

のようは を考えることにする。

$$PC = PC1 + PC2$$

$$PC1 = \frac{1}{\{1 - e(\infty)\}^2} \cdot \int_0^{\infty} \{e(t) - e(\infty)\}^2 dt$$

$$PC2 = \frac{w}{\{1 - e(\infty)\}^2} \cdot \int_0^{\infty} \{\dot{e}(t)\}^2 dt \quad (6-22)$$

図6-1の場合に適用して求めると、

$$PC = \frac{(a+b)}{2(ab+K_c)} + \frac{1}{2(a+b)} + \frac{w(ab+K_c)}{2(a+b)} \quad (6-23)$$

つぎにこのPCを最小にする K_c 、すなわち最適ゲインを求める。

$$\frac{\partial}{\partial K_c}(PC) = -\frac{(a+b)}{2(ab+K_c)^2} + \frac{w}{2(a+b)} \quad (6-24)$$

$$\partial PC / \partial K_c = 0 \text{ より}$$

$$K_c = \sqrt{1/w} \cdot (a+b) - ab \quad (6-25)$$

したがって、(6-12)、(6-25)式より制御装置としてのゲイン K_c の最適値

K_{co} は

$$K_{co} = \{\sqrt{1/w} \cdot (a+b) - ab\} / \{A \cdot (b-a)\} \quad (6-26)$$

以上の関係の概略図を示したのが 図6-5. である。

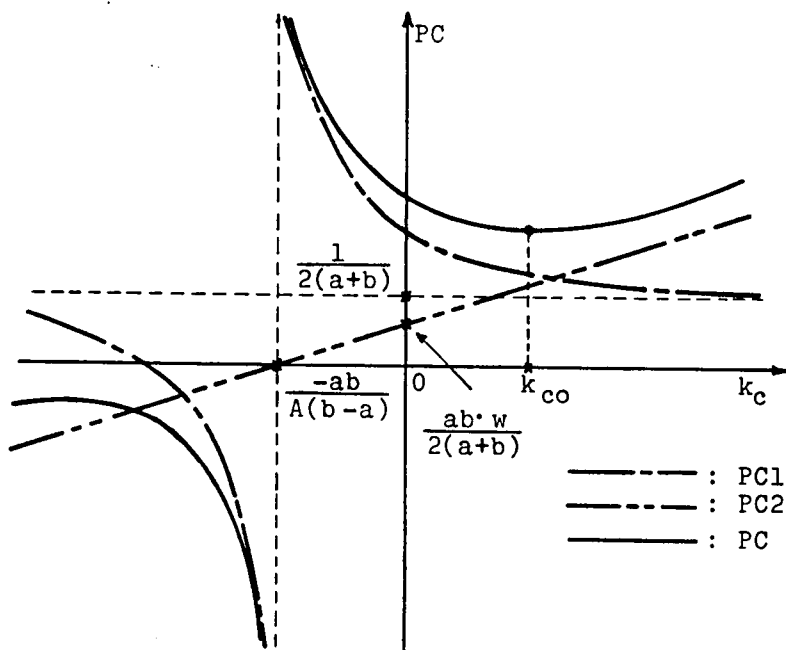


図 6-5. 連続系の評価規範 PC と制御装置のゲイン k_c との関係

§6.4 離散値系の評価規範と最適ゲイン

つぎに §6.3 で述べた連続系のふるまいとある意味で等価な (系の入力
のサンプル時刻での値が連続系のそれに等しい.) 離散値系 図6-6.1
について §6.3 と同様のことを考えてみよう。

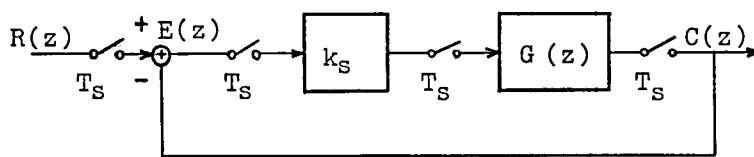


図6-6. 推定のために仮想的に考えた等価的離散値系

($G(z)$ は連続系の制御対象 $G(s)$ を推定したもの)

すなわち、連続系の P.I. 特性 (6-22) 式と等価な離散値系の
P.I. を考え、これを最小にするようなゲイン k_S を求める。そして、この k_S に
より §6.3 で求めた k_c の代用におこなうことを考える。

(6-22) 式に等価な離散値系の P.I. として次式のような PS1,
PS2, PS を考える。

$$PS = PS1 + PS2 \quad (4-27)_1$$

$$PS1 = \frac{1}{\{1 - e(\infty)\}^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \{e(nT_S) - e(\infty)\}^2 \cdot T_S \quad (4-27)_2$$

$$PS2 = \frac{w}{\{1 - e(\infty)\}^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{e}(nT_S)\}^2 \cdot T_S \quad (4-27)_3$$

ただし, T_s : サンプル周期.

W : (6-22) 式におけるものと同じ重み

まず, (6-27)₂ 式を計算する.

5

連続系の場合と同様に入力は *unit step* とし, s 領域に対して,
 z 領域で計算を行なうことにする.

$$E(z) = \frac{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}}{\{1 + (\alpha_1 + K_s) z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}\}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (6-28)$$

10

ただし, $K_s \triangleq k_s \cdot \alpha_3$

(6-29)

offset $e(\infty)$ は,

15

$$e(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} e(nT_s) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot E(z)$$

$$= \frac{1 + \alpha_1 + \alpha_2}{1 + (\alpha_1 + K_s) + \alpha_2} \quad (6-30)$$

連続系の場合と同様に次式のような $F(z)$ を考える.

20

$$F(z) = E(z) - e(\infty) \cdot 1/(1 - z^{-1})$$

$$= \left(\frac{K_s}{1 + \alpha_1 + K_s + \alpha_2} \right) \cdot \frac{1 - \alpha_2 z^{-1}}{\{1 + (\alpha_1 + K_s) z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}\}} \quad (6-31)$$

25

また, その逆 z 変換したものを $f(nT_s)$ とする.

$$f(nT_s) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = e(nT_s) - e(\infty) \quad (6-32)$$

ここで

30

$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \{f(nT_s)\}^2$ を考える.

ところで、 z 領域での Parseval の等式を求めると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{f(nT_s)\}^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) \cdot F(z^{-1}) \cdot z^{-1} dz \quad (6-33)$$

(Γ : $F(z)$ のすべての極を含む閉領域)

これを用いて、

$$y_1 = \sum_{F(z) \text{ のすべての極について}} [F(z) \cdot F(z^{-1}) \cdot z^{-1}] \quad (6-34)$$

留数計算を実行して、

$$y_1 = \frac{K_s^2 \cdot \{(1+\alpha_2^2)(1+\alpha_2) + 2\alpha_2(\alpha_1 + K_s)\}}{(1-\alpha_2)(1+\alpha_1 + K_s + \alpha_2)^3 \cdot (1-\alpha_1 - K_s + \alpha_2)} \quad (6-35)$$

また、(6-30) 式より、

$$1/\{1-e(0)\}^2 = \left(\frac{1+\alpha_1 + K_s + \alpha_2}{K_s} \right)^2 \quad (6-36)$$

であるから、PS1 は次式のようになる。

$$PS1 = \frac{T_s}{2(1-\alpha_2)} \left\{ \frac{(1-\alpha_2)^2}{(1+\alpha_1 + K_s + \alpha_2)} + \frac{(1+\alpha_2)^2}{(1-\alpha_1 - K_s + \alpha_2)} \right\} \quad (6-37)$$

つぎに、(6-27)₃ 式の PS2 を計算しよう。

連続系の $\dot{e}(t) = d/dt \{e(t)\}$ に相当するものを離散値系で考える場合、

差分の取り方で色々なものがあるが、その中で最も簡単な後退差分を用いることにする。すなわち、

$$\dot{e}(nT_s) = \frac{1}{T_s} \{e(nT_s) - e((n-1) \cdot T_s)\} \quad (6-38)$$

さらにこれを z -領域で考えると,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\dot{e}(nT_s)\} &= \frac{1}{T_s} \{E(z) - E(z) \cdot z^{-1}\} \\ &= \frac{1}{T_s} \cdot E(z) \cdot (1 - z^{-1}) \end{aligned} \quad (6-39)$$

PS1 の時と同様に次の $H(z)$, $h(nT_s)$ を考える.

$$H(z) = E(z) \cdot (1 - z^{-1}) = \frac{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}}{1 + (\alpha_1 + K_s)z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}} \quad (6-40)$$

$$h(nT_s) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \dot{e}(nT_s) \cdot T_s \quad (6-41)$$

$$y_2 \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \{h(nT_s)\}^2 \quad (6-42)$$

としたい. z -領域での Parseval の等式を用いて計算すると,

$$y_2 = \frac{K_s^2 (1 + \alpha_2)}{(1 - \alpha_2) \{(1 + \alpha_2)^2 - (\alpha_1 + K_s)^2\}} \quad (6-43)$$

(6-27)₃, (6-36), (6-43) 式より,

$$PS2 = \frac{W}{T_s} \cdot \frac{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 + K_s + \alpha_2)}{(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_1 - K_s + \alpha_2)} \quad (6-44)$$

変形して,

$$PS2 = \frac{W(1 + \alpha_2)}{T_s(1 - \alpha_2)} \cdot \left\{ -1 + \frac{2(1 + \alpha_2)}{(1 - \alpha_1 - K_s + \alpha_2)} \right\} \quad (6-44')$$

つぎに, (6-27), (6-37), (6-44) 式より, PS を最小にするように K_S を決める。すなわち, 制御装置としてのゲイン K_S の最適値 K_{S0} を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial PS}{\partial K_S} &= \frac{T_S}{2(1-\alpha_2)} \left\{ -\frac{(1-\alpha_2)^2}{(1+\alpha_1+K_S+\alpha_2)^2} + \frac{(1+\alpha_2)^2}{(1-\alpha_1-K_S+\alpha_2)^2} \right\} \\ &\quad - \frac{W(1+\alpha_2)}{T_S(1-\alpha_2)} \cdot \frac{2(1+\alpha_2)}{(1-\alpha_1-K_S+\alpha_2)^2} \end{aligned} \quad (6-45)$$

$\partial PS / \partial K_S = 0$ とおいて整理すると,

$$\begin{aligned} (4W+T_S^2)(1+\alpha_2)^2(1+\alpha_1+K_S+\alpha_2)^2 \\ - T_S^2(1-\alpha_2)^2(1-\alpha_1-K_S+\alpha_2)^2 = 0 \end{aligned} \quad (6-46)$$

上式より K_S を求めると,

$$K_S = \left\{ \frac{-\sqrt{4W+T_S^2} \cdot (1+\alpha_2) \pm T_S(1-\alpha_2)}{\sqrt{4W+T_S^2} \cdot (1+\alpha_2) \pm T_S(1-\alpha_2)} \right\} (1+\alpha_2) - \alpha_1 \quad (6-47)$$

(6-47) 式のように, PS の極値を与える K_S は 2 つ存在するが, 最小値を与える 求めるものは 複号のうち正の符号をとるものである。(図 6-7 参照)。すなわち,

$$K_S = \left\{ \frac{-\sqrt{4W+T_S^2} \cdot (1+\alpha_2) + T_S(1-\alpha_2)}{\sqrt{4W+T_S^2} \cdot (1+\alpha_2) + T_S(1-\alpha_2)} \right\} (1+\alpha_2) - \alpha_1 \quad (6-48)$$

したがって, (6.4.3), (6.4.22) 式より, 制御装置の最適ゲイン K_{S0} は,

$$K_{S0} = \left[\left\{ \frac{-\sqrt{4W+T_S^2} \cdot (1+\alpha_2) + T_S(1-\alpha_2)}{\sqrt{4W+T_S^2} \cdot (1+\alpha_2) + T_S(1-\alpha_2)} \right\} (1+\alpha_2) - \alpha_1 \right] / \alpha_3 \quad (6-49)$$

以上の関係の概略図を示したのが図6-7.である。

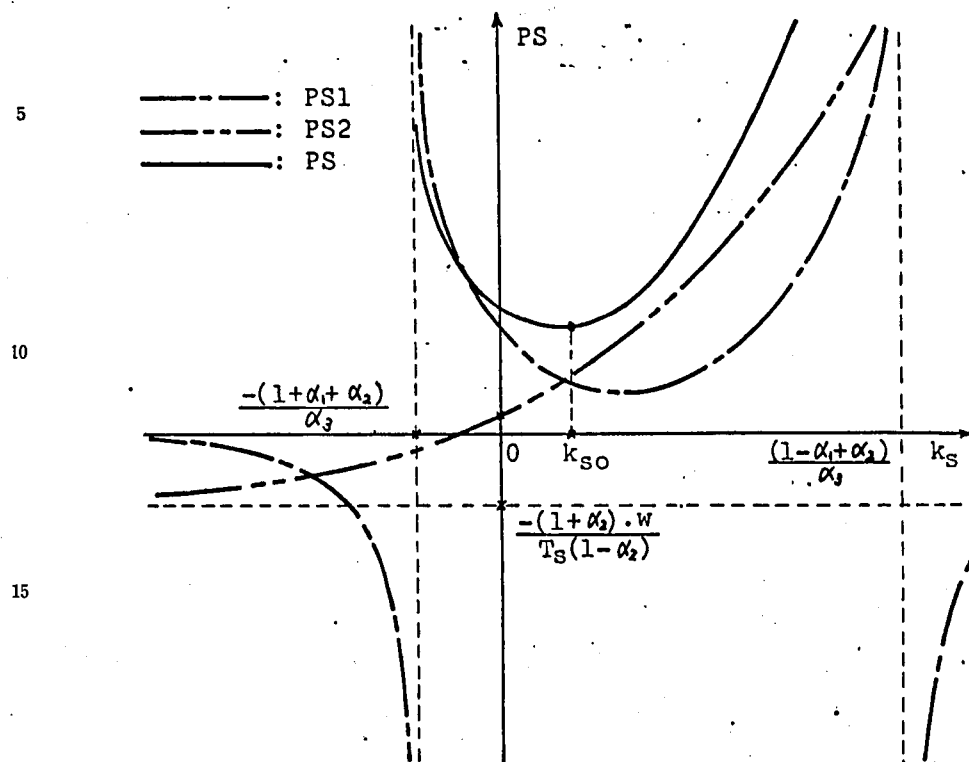


図6-7. 離散値系の評価規範 PS と制御装置のゲイン k_s との関係

§6.5 k_c と k_s との関係

図6-1. において, $E(s)$ が分かれば $C(s)$ に関するかぎり, 図6-8. のような開ループ系で話をしてもよい。

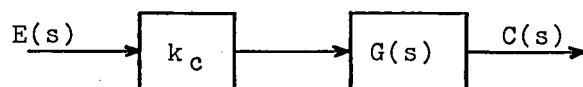


図6-8. 開ループ系 (連続系)

$G(s)$ のインパルス応答を $g(t)$ とすれば, 時刻 t_1 における出力 $c(t_1)$ は,

$$c(t_1) = \int_0^{t_1} g(t_1 - \tau) \cdot k_c \cdot e(\tau) d\tau \quad (6-50)$$

ここで, T_s が十分小さければ近似的に次式が成立ち, それを用いて, (6-50) 式は (6-52) 式のように近似的に書き表わすことが出来る。

$$e(t) \cong e(kT_s) \quad (kT_s \leq t \leq \overline{k+1} \cdot T_s)$$

$$g(t-\tau) \cong g(\overline{k-i} \cdot T_s) \quad (\overline{k-i} \cdot T_s \leq t-\tau \leq \overline{k-i+1} \cdot T_s)$$

(6-51)

$$c(t_1) \cong \sum_{i=0}^m g(\overline{m-i} \cdot T_s) \cdot k_c \cdot e(iT_s) \cdot T_s$$

(6-52)

$$(ただし, mT_s \leq t_1 \leq \overline{m+1} \cdot T_s)$$

図 6-8. において, (6-51), (6-52) 式が成立するのは 図 6-9. のシステムである。

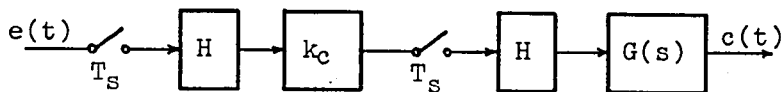


図 6-9. 図 6-8. の近似系

(H : 零次ホールド回路, T_s : サンプル周期)

一方、図 6-6. の離散値系の場合も $E(z)$ が分れば、 $C(z)$ に換する
 かり、図 6-10. に示すような サンプル系で話をしてもよい。

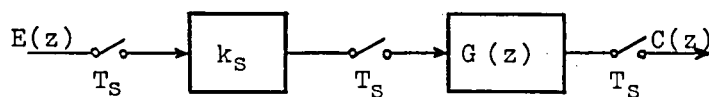


図 6-10. サンプル系 (離散値系)

図 6-10 の $G_s(z)$ は図 6-8. の $G(s)$ をパルス伝達関数に等価
 変換したものの (インパルス応答のサンプル時刻での値が等しいような等価変換)
 であるから、時刻 $t_i = mT_s$ における出力 $C(mT_s)$ は次式のように表わせる。

$$C(mT_s) = \sum_{i=0}^m g(\overline{m-i} \cdot T_s) \cdot k_s \cdot e(iT_s) \quad (6-53)$$

(6-52) 式と (6-53) 式 と比較して、

$$k_c \cong k_s / T_s \quad (6-54)$$

を得る。なお、ここで注意しなければならないことは、(6-52) 式はすべての
 時刻にわたって意味のある式であり、 $T_s \rightarrow 0$ の極限において厳密な式と
 なる近似式である。それに対して、(6-53) 式は $t = mT_s$ ($m: \text{integer}$)
 のときのみ意味のある式であってこれらの点においては厳密に成立つ式である。

さて、(6-54) 式の物理的意味を *unit step response* を例に
 として考察してみよう。

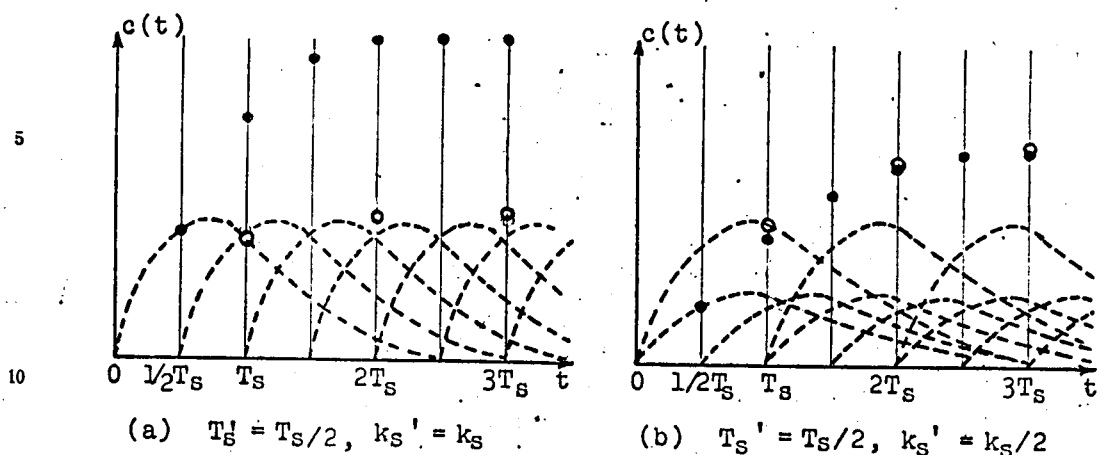


図 6-11. サンプル周期と制御装置のゲインの選定による
step response への影響

- サンプル周期 $T_s' = T_s/2$ のとき,
- サンプル周期 T_s のとき

図 6-11. の (a) 図のように, サンプル周期 T_s を $T_s' = T_s/2$ にし, しかも
制御装置のゲイン k_s を $k_s' = k_s$ とそのまゝの場合を考えると, サンプル周期
 T_s' を用いた時の時刻 $t = m'T_s' (= m \cdot T_s)$ における出力は サンプル周期 T_s
を用いた時の同時刻 $t = mT_s$ における出力のほぼ 2 倍の値の値になっている
ことが分る。図 6-11. の (b) 図は $T_s' = T_s/2$ のとき制御装置 k_s も $k_s' = k_s/2$
とした場合の step response を描いている。このようにすると, サンプル周期
 T_s' を用いた時の時刻 $t = m'T_s' (= mT_s)$ における出力は サンプル周期 T_s
を用いた時の同時刻 $t = mT_s$ における出力とほぼ一致する。

一般に、 $T_s' = T_s/n$ の場合には $k_s' = k_s/n$ にすればよいことも容易に推測
出来るであろう。したがって、サンプリング周期が変化しても出力が変化しないように
するためには、制御装置のゲインもそれに比例して変化させればよいことが分かる。
すなわち、 k_s/T_s が一定になるようにゲインを選べば近似的に連続系と
等価になることが分かる。すなわち、 k_s/T_s が連続系の制御装置のゲイン
 k_c に対応するわけで、(6-52)式が妥当な式だということがわかる。

§6.6 P.I.における重み W の決定

(6-26)式からわかるように、最適ゲイン k_{co} は W によって変化するので、システムの安定度、速応性等は W に支配されている。したがって、(6-26)式で与えられる最適ゲイン k_{co} を用いて実際にシステムを構成する場合、重み W を適切なものを選ぶ必要がある。換言すれば、 W を適切に選んだときのみ、(6-26)式で与えられる最適ゲイン k_{co} というものはシステムにとって本当に最適であるといえる。そこで、古典制御理論で従来、経験的に望ましいと考えられている制御系の安定度とか速応性を評価するなんらかの特性量を用いて重み W を決定することが考えられる。ここでは、その特性量として共振値 M_p を選んで W を決定することにする。

i) 共振値 M_p

図6-1. の系全体の伝達関数 $M(s)$ は、

$$M(s) = \frac{A \cdot k_c (b-a)}{s^2 + (a+b)s + ab + A \cdot k_c (b-a)} \quad (6-55)$$

となる。ここで、

$$T = 1 / \sqrt{ab + A \cdot k_c (b-a)} \quad (6-56)$$

$$\zeta = (a+b) / 2 \sqrt{ab + A \cdot k_c (b-a)} \quad (6-57)$$

$$K = A \cdot k_c \cdot (b-a) / \{ab + A \cdot k_c (b-a)\} \quad (6-58)$$

とあくと、(6-55)式は次式のように書ける。

$$M(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \quad (6-59)$$

したがって、その周波数伝達関数 $M(j\omega)$ は、

$$M(j\omega) = \frac{K}{(1 - T^2 \omega^2) + j2\zeta T \omega} \quad (6-60)$$

上式において、 $|M(j\omega)|$ を最大にする角周波数 ω を ω_p (すなわち、固有角周波数) とすると、 $|M(j\omega_p)|$ と $|M(j0)|$ の比が共振値 M_p であるから M_p は、

$$M_p = \left| \frac{M(j\omega_p)}{M(j0)} \right| = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (6-61)$$

となり、その時の固有角周波数 ω_p は次式となる。

$$\omega_p = \sqrt{1 - 2\zeta^2} / T \quad (6-62)$$

以下では、 M_p が 1 より大きいとき、すなわち、系全体の *indicial* 応答が振動的な場合についてのみ考える。なお、一般に良い応答を得るための共振値 M_p の値としては $M_p = 1.1 \sim 1.5$ 程度がよいとされている。

ii) T (自然角周波数の逆数) による重み w の決定

(6-23) 式の PC から得られる最適ゲイン k_{co} を用いた時、(6-61) 式

で与えられる M_p がどの程度になるか、あるいは逆に、 M_p を指定した場合、

その時のゲイン k_c が (6-26) 式の k_{co} に等しくなるのは重み w がいくら

の時かを調べるため、 w と M_p の関係を求めよう。この場合、 w は M_p

だけでなく、システムに依存するので、 M_p 以外にシステムを特徴づけるものとして、
まず自然角周波数の逆数 T ((6-56)式 あるいは (6-59)式の T) との
関係を求めてみる。

(6-36)式と (6-57)式より

$$\zeta^2 = \sqrt{W} (a+b)/4 \quad (6-63)$$

また、(6-61)式より、 ζ^2 を求めると、

$$\zeta^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 1/M_p^2}}{2} \quad (6-64)$$

となる。ところで、 ω_p は正の実数でなければならぬから、

(6-62)式より

$$\zeta^2 < 1/2 \quad (6-65)$$

したがって、(6-64)式、(6-65)式より、

$$\zeta^2 = (1 - \sqrt{1 - 1/M_p^2})/2 \quad (6-66)$$

となる。一方、(6-36)式、(6-56)式より、

$$(a+b) = \sqrt{W}/T^2 \quad (6-67)$$

であるから、(6-63)、(6-66)、(6-67)式より、 W を求めると、

$$W = 2T^2 (1 - \sqrt{1 - 1/M_p^2}) \quad (6-68)$$

したがって、 W は M_p を指定し、 T が与えられると決定できる。

$$W = C_1 \cdot T^2 \quad (6-69)$$

ただし,

$$C_1 = 2 \left(1 - \sqrt{1 - 1/M_p^2} \right) \quad (6-70)$$

$M_p = 1.155$ のとき, $C_1 \cong 1.0$ となるのでこのとき, $W \cong T^2$ となり, 重みはほぼ自然角周波数の逆数 T の 2 乗に選べばよいことが分かる。

iii) T_p (固有角周波数に対する半周期) による W の決定

ii) において, T が与えられると, W はほぼその 2 乗として決定されることが分かったが, 実際問題としては, T は得られにくいものである。そこで, T に代わるものとして T_p を考える。実際, 固有角周波数 ω_p はシステムの次数に関係なく比較的容易に得られる。したがって, T_p はそれから簡単に得られる。まず, T と T_p の関係を導こう。(6-56), (6-57), (6-62) 式より ω_p を求めると次式のようになる。

$$\omega_p = \sqrt{\{2A \cdot k_c(b-a) - (a^2 + b^2)\} / 2} \quad (6-71)$$

この固有角周波数 ω_p の半周期を T_p としているから,

$$T_p = \pi / \omega_p \quad (6-72)$$

また, (6-62), (6-66), (6-72) 式を用いると,

$$T = \left\{ \sqrt[4]{M_p^2 - 1} / (\pi \sqrt{M_p}) \right\} \cdot T_p \quad (6-73)$$

したがって、(6-69)式に(6-72)式を代入して、

$$W = C_2 \cdot T_p^2 \quad (6-74)$$

5 したがって、

$$C_2 = \frac{2\{M_p \sqrt{M_p^2 - 1} - (M_p^2 - 1)\}}{\pi^2 \cdot M_p^2} \quad (6-75)$$

10 この C_2 と M_p の関係を 図 6-16. に示す。 $M_p = 1.1 \sim 1.2$ では、ほぼ $C_2 = 1/20$ としてよいようである。

iv) 系のパラメータ推定値を用いた W の決定

15

パラメータの推定値 α_i ($i=1, 2, 3$) より 重み W が決定出来れば (6-49) 式の離散値系の最適ゲイン k_{so} を求める際都合がよい。そこで W をパラメータの推定値を用いて表わしてみよう。

20

(6-57)式を(6-58)式の T で表わすと、

$$\zeta = (a+b) \cdot T / 2 \quad (6-76)$$

(6-66), (6-76)式より ζ^2 を消去すると、

25

$$T^2 = 2(1 - \sqrt{1 - 1/M_p^2}) / (a+b)^2 \quad (6-77)$$

(6-77)式を(6-68)式に代入して、

30

$$W = C_3 / (a+b)^2 \quad (6-78)$$

ただし,

$$C_3 = 4 \cdot (1 - \sqrt{1 - 1/M_p^2}) \quad (6-79)$$

連続系の評価規範 PC には (6-78), (6-79) 式を用いることになる。

一方, (6-5) 式より,

$$(a+b) = -\frac{1}{T_5} \cdot \ln \alpha_2 \quad (6-80)$$

よって, (6-78) 式に代入して,

$$W = C_3 \cdot T_5^2 / (\ln \alpha_2)^2 \quad (6-81)$$

したがって, 離散値系の評価規範 PS には, (6-81) 式を用いるとよい。

ここで W が T_5^2 に比例しているため, PS1, PS2 のデメンジョンの上からも妥当な結果であることが分かる。なお, C_3 は (6-79) 式で与えられるもので, M_p を指定すると一意的に定まる定数である。

さらに, $0 < \alpha_2 < 1$ であることを考慮して, PS あるいは K_{50} の計算を簡単にするため, $(\ln \alpha_2)$ を $(\alpha_2 - 1)$ で展開して近似式による方法も考えられる。

$$\ln \alpha_2 = (\alpha_2 - 1) - \frac{(\alpha_2 - 1)^2}{2} + \frac{(\alpha_2 - 1)^3}{3} - \dots$$

を利用して,

$$(\ln \alpha_2)^2 \cong (\alpha_2 - 1)^2 - (\alpha_2 - 1)^3 + (\alpha_2 - 1)^4 \quad (6-82)$$

を用いると, $0 < \alpha_2 < 1$ の範囲ではかなりより近似になっている。

§ 6.7 いくつかの例題における計算例

ここで行なっていることの目的の1つは、実際的な制御の問題、すなわち、
5 実際の系は連続系であって、測定により得られるのが等価的離散値系のパラ
メータである場合、そのパラメータを直接用いて、ある評価規範のもとでその離散
値系を最適にするような制御装置のパラメータをそのまゝ、もとの連続系の制御
装置に用い得ることの可能性を調べることに、いま1つは推定法の良さを比較
10 するための評価規範を得ることであるが、これについては次節で取扱う。

さて、ここでは本章、前節までに述べて来た方法を実際の系(例題)にあって
15 はめて計算した。すなわち、連続系において、前節で述べた評価規範 PC
を最小にする制御装置の最適ゲイン k_{co} を用いた時の系全体が古典的
制御理論による推奨値(ここでは共振値 M_p)を満足するように PC 中の
重み W を決定する。つぎにその時の重み W を使って離散値系の評価規
20 範 PS とそのときの最適ゲイン k_{so} を求めた。

図 6-12 は連続系の制御対象の伝達関数 $G(s)$ が (6-83) 式
に示すもので、 $a=0.4$, $b=0.9$ の場合について、上記のことを計算した結果で
25 ある。

$$G(s) = \frac{(b-a)}{(s+a)(s+b)} \quad (6-83)$$

ここでは、§ 6.6 - iii) の (6-74) 式により、重み W を決定している。

30 また、 C_2 としては、 $M_p \cong 1.21$ に相当する $1/20$ を用いた。(図 6-16. 参照)

図の横軸は、制御装置のゲイン k_c を対数目盛でとり、縦軸は評価規範

の $PC1, PC2, PC$ である。

図 6-13. は、図 6-12. のシステムと等価な離散値系についてのグラフである。また、重み w も同じ値を用いている。

5 横軸は 離散値系の制御装置のゲイン k_s と サンプリング周期 T_s の比 k_s/T_s (連続系の k_c に相当するもの) を対数目盛でとり、縦軸は 離散値系の評価規範 $PS1, PS2, PS$ である。

10 なお、グラフが 2 本づつあるのは T_s を変えた時のものである。

図 6-12. と 図 6-13. から、 $k_c \cong k_s/T_s$ とおくと、 PC と PS は非常によく似た傾向にあることが分かる。また、 T_s を小さくしていくと $(k_s/T_s : PS)$ のグラフが $(k_c : PC)$ のグラフに漸近的に近づくことも分かる。

15 図 6-14. は 図 6-12. と 図 6-13. の PC, PS のグラフの最適ゲイン k_{co} , k_{so}/T_s 付近を拡大し、一諸に描いたものである。

20 このグラフからも、 T_s を小さくしていったとき $(k_s/T_s : PS)$ と $(k_c : PC)$ のグラフが漸近していく様子が分かる。ただし、ここでは T_s をシステムの T_p を規準に決めている。

25 図 6-15. は 図 6-14. と同じ種類のグラフで、ただし制御対象が $a=0.5$, $b=0.6$ ((6-83)式において) の場合について描いたものである。グラフからわかるように、システムが変わっても、傾向は全く同じであることが分かる。

30 図 6-17. は T_p/T_s を変化させたとき、 k_{so}/T_s の k_{co} に対する近かさがどのよう
に変わるかを調べたものである。グラフより $(k_{so}/T_s)/k_{co}$ を 99% 以上に
するには $T_p/T_s \geq 30$ 程度に選ぶ必要がある。 $T_p/T_s = 10$ では 93% 程度であり、

実用的には、このあたりを用いるとよいのではないかと思われる。これはインパルス
応答とサンプリング周期との関係などから考えても妥当な結果である。

5 以上のことから、評価規範中の重み w を何らかの方法で適当に選べば連続
系での最適制御はそれと等価な離散値系での最適制御の問題と等価に
なること。すなわち、適当な w が決まると離散値系で最適ゲイン k_{so} を求め、
 k_{so}/T_s を k_{co} と考えて連続系の制御ゲインに用いることが可能である。

10 さらに、このようなことを用いれば、制御対象の動特性が時間とともに
ゆくりと変化するような系において、制御装置のゲインを適応的に考えて望ま
しい特性を保つ、いわゆる一種の適応制御が考えられる。すなわち、相関法
15 等で制御対象のインパルス応答を逐次測定し、その時間とともにゆくりと
変動するサンプル値を得る。これを用いて、INM 等により等価的離散値系
のパルス伝達関数のパラメータ α_i ($i=1, 2, 3$) の推定値 $\hat{\alpha}_i$ ($i=1, 2, 3$)
を得る。つぎに、本章で紹介した評価規範 PS により最適ゲイン k_{so} を $\hat{\alpha}_i$
20 ($i=1, 2, 3$) の関数として求め、 k_{so}/T_s をもとの連続系の制御ゲイン k_{co} として
用いるのである。

この際、PS 中の、あるいは、 k_{so} 中の w としては、(6-81)式を用いる。
25 これは制御対象の動特性が変動すれば、それについて重み w が、つまり、
評価規範そのものが変わり、制御ゲインがそれに応じて変動して、系全体と
しては望ましい特性を保つようになっている。すなわち、適応制御になって
30 いると考えられる。

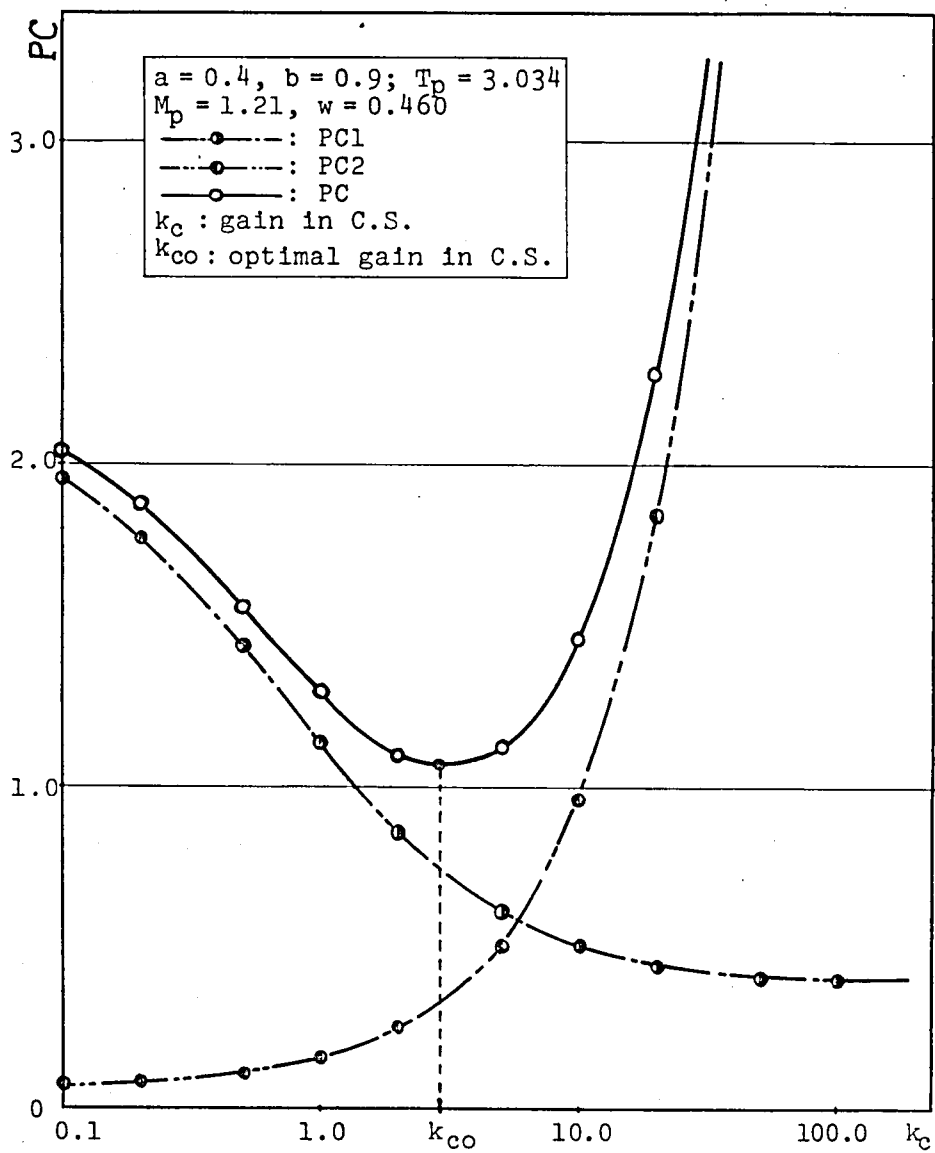


図6-12. 連続系の制御ゲインと評価規範

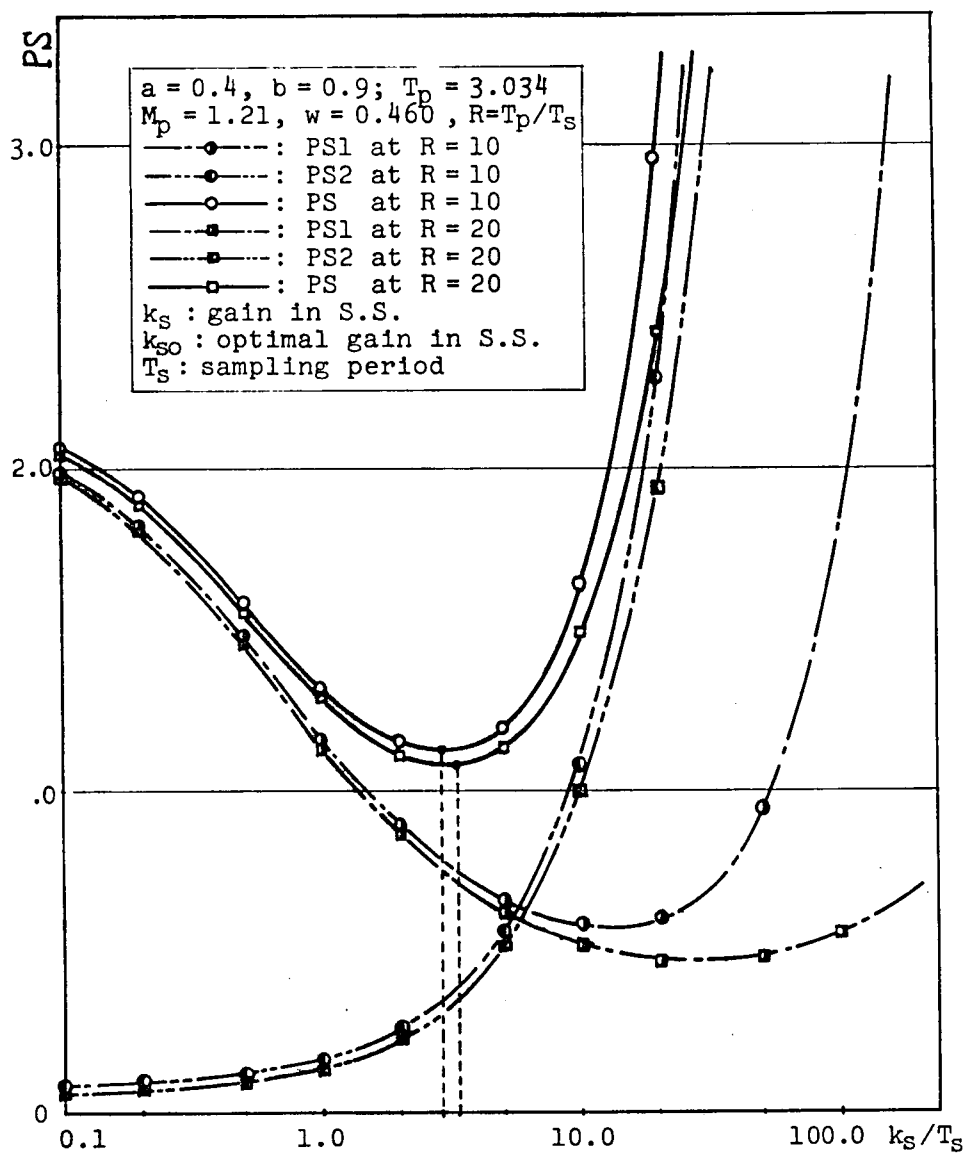


図 6-13. 等価な離散値系の制御ゲインと評価規範

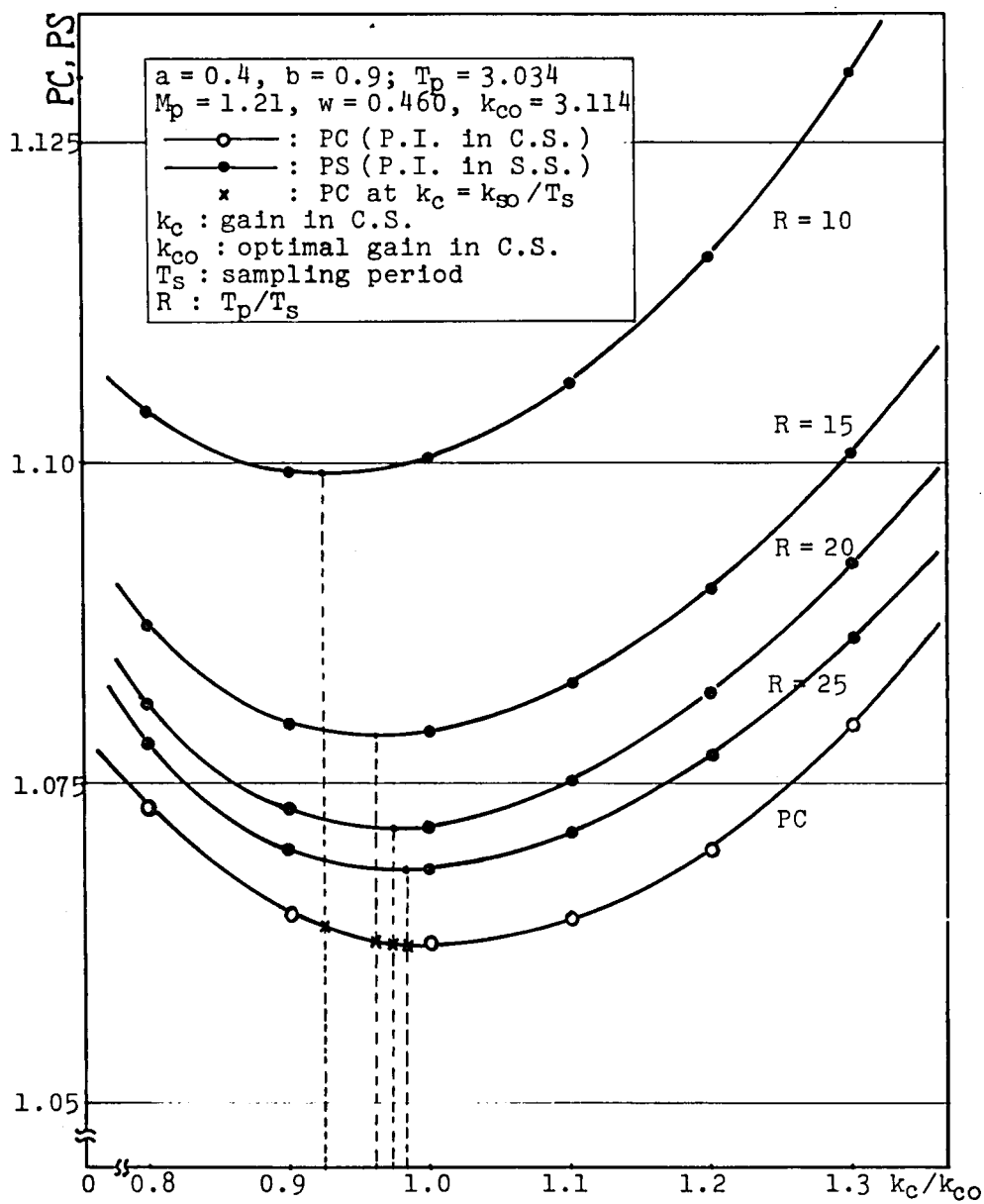


図6-14. 最適制御ゲイン付近の連続系と等価な離散値系の評価規範 (そのI)

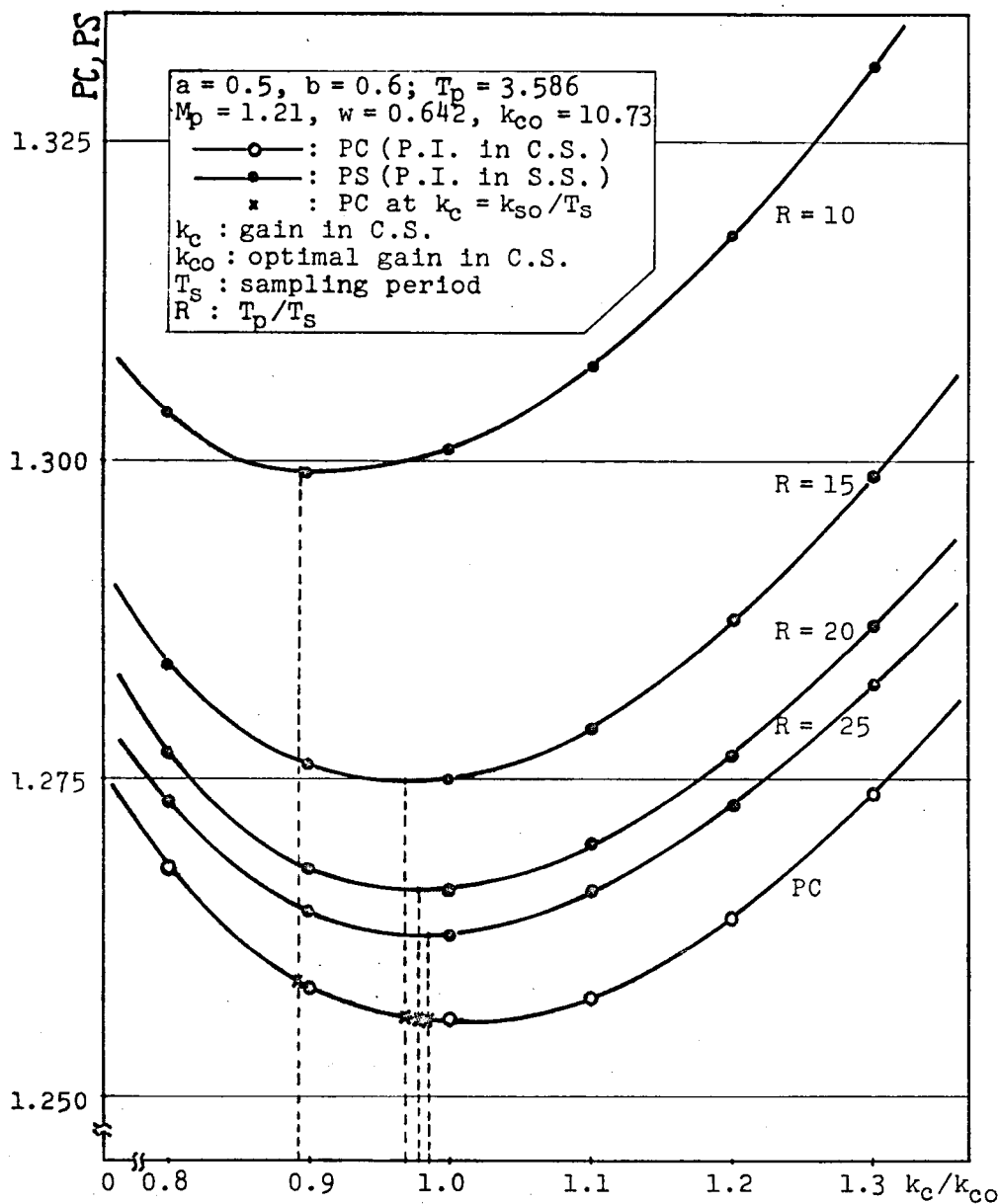


図6-15. 最適制御ゲイン付近の連続系と等価な離散値系の評価規範 (そのII)

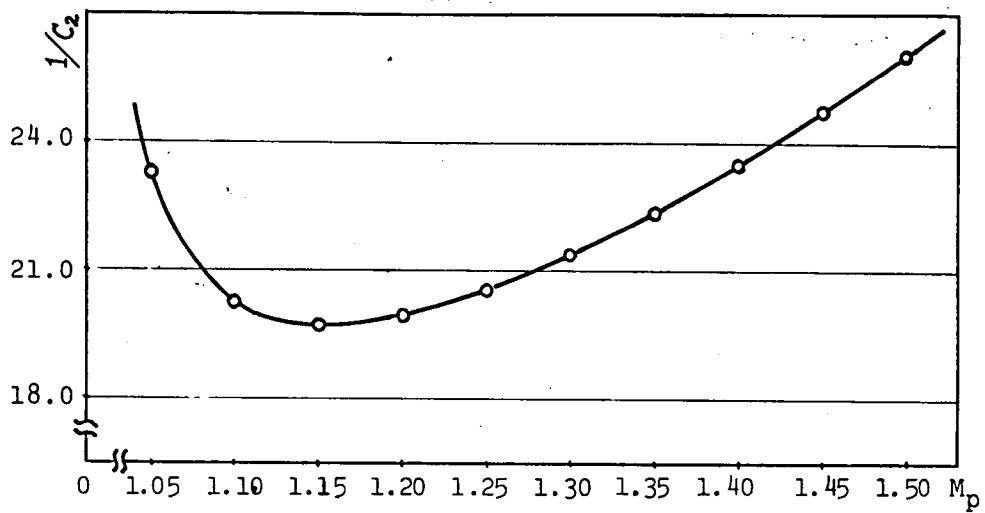


図6-16. 最適重み W における係数 C_2 と共振値 M_p との関係

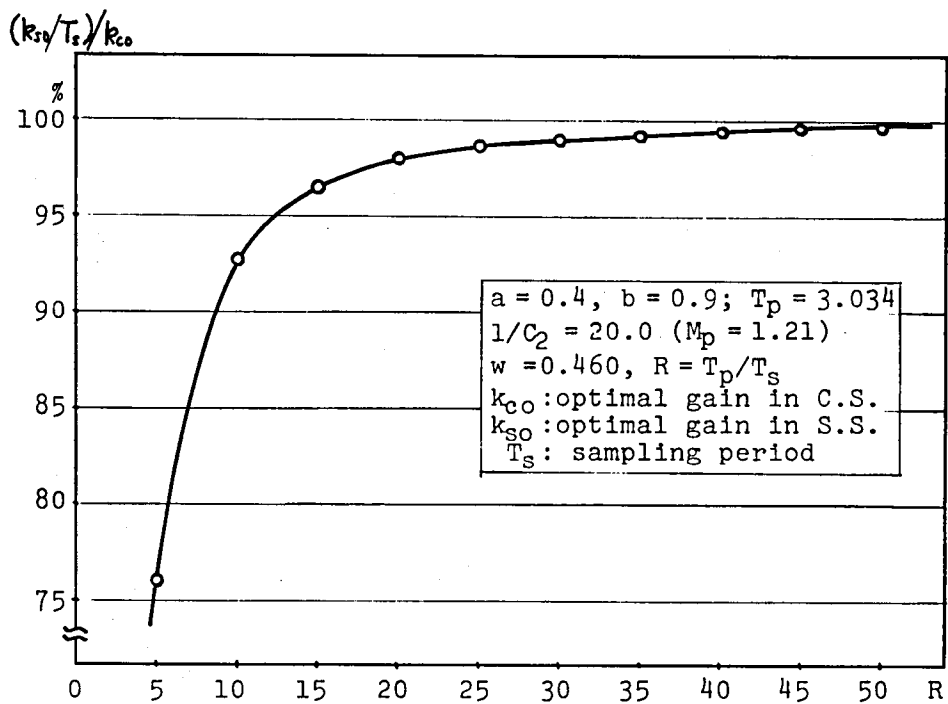


図6-17. 写像分散値系の最適ゲインと連続系の最適ゲインとの比とサンプリング周期との関係

§ 6.8 この評価規範による MLIM と INM の比較

第4章において、系の動特性推定とそのパルス伝達関数と仮定して、単パラメータ推定の問題として考え、そのパラメータの推定値の真値との比較により推定法の良否を調べ、INMの優位性を主張してきた。

ここでは、本章で述べてきたような立場から、制御対象が2次系で制御装置としては可変ゲインを選んだ最も簡単な場合について、その制御対象の等価的離散値系のパラメータを MLIM, INM1, INM2 で推定し、それぞれの推定値 $\hat{\alpha}_i$ ($i=1, 2, 3$) より離散値系の最適ゲイン k_{so} を求め、そして、(6-54)式の関係から近似的に求められる連続系の最適ゲイン k_{co}^* と、これを用いた制御系の (6-22)式に示す評価規範とによる比較を行った。

その結果を表6-1, 表6-2 に示す。(§6.7 と同じ計算例を用いた。) 表より、この評価規範は制御装置として最も単純なゲイン要素のみと仮定しているのでパラメータ変動に対し非常に感度の悪いものであるが、いずれも MLIM より INM の方がすぐれていることが分かる。また、このように制御対象が純粋に2次系の場合には、(INM2 は系が2次系から割りずれた場合にも適用できるように考えたもの) INM1 も INM2 も殆んど同じ程度であるが、ノイズが比較的大きいところで INM2 の方が良くするのは注意すべき点である。

表6-1 制御系全体の評価規範による推定機構の良さの比較
(そのI)

$$\left(G(s) = \frac{(b-a)}{(s+a)(s+b)} \quad , \quad \begin{matrix} a = 0.40 \\ b = 0.90 \end{matrix} \text{ の場合} \right)$$

System Parameters, Optimal Gain and Optimal P.I.					
a = 0.40, b = 0.90, T _p = 3.011, M _p = 1.21, w = 0.453					
k _{co} = 3.147, P.I. _o = 1.058					
Noise	Method	k _{co} [*] P.I.	Mean	Standard Deviation	Ratio
$\frac{\sigma_n}{G_m} = 0.01$	MLIM	k _{co} [*]	3.556	0.247	1.130
		P.I.	1.065	0.000	1.007
	INM1	k _{co} [*]	3.036	0.045	0.965
		P.I.	1.059	0.000	1.001
	INM2	k _{co} [*]	3.242	0.085	1.030
		P.I.	1.059	0.000	1.002
$\frac{\sigma_n}{G_m} = 0.02$	MLIM	k _{co} [*]	5.082	1.181	1.615
		P.I.	1.122	0.003	1.061
	INM1	k _{co} [*]	2.995	0.183	0.952
		P.I.	1.063	0.000	1.005
	INM2	k _{co} [*]	3.652	0.150	1.160
		P.I.	1.065	0.000	1.007
$\frac{\sigma_n}{G_m} = 0.03$	MLIM	k _{co} [*]	7.097	2.876	2.255
		P.I.	1.239	0.013	1.172
	INM1	k _{co} [*]	2.913	0.436	0.926
		P.I.	1.074	0.001	1.015
	INM2	k _{co} [*]	3.918	0.225	1.245
		P.I.	1.072	0.000	1.014

σ_n : standard deviation of noise

G_m : maximum sampled value of impulse response

k_{co}^{*} : equivalent gain in continuous system (=k_{so}/T_s)

trial time : N = 50

表 6-2 制御系全体の評価規範による推定機構の良さの比較
(そのⅡ)

$$\left(G(s) = \frac{(b-a)}{(s+a)(s+b)} , \quad \begin{matrix} a = 0.50 \\ b = 0.60 \end{matrix} \text{ の場合} \right)$$

System Parameters, Optimal Gain and Optimal P.I.					
a = 0.50, b = 0.60, T _p = 3.559, M _p = 1.21, w = 0.632 k _{co} = 10.845, P.I. _o = 1.250					
Noise	Method	k _{co} * P.I.	Mean	Standard Deviation	Ratio
$\frac{\sigma_n}{G_m} = 0.01$	MLIM	k _{co} *	12.168	2.808	1.122
		P.I.	1.257	0.000	1.006
	INM1	k _{co} *	10.452	0.539	0.964
		P.I.	1.251	0.000	1.001
	INM2	k _{co} *	11.048	0.861	1.019
		P.I.	1.252	0.000	1.001
$\frac{\sigma_n}{G_m} = 0.02$	MLIM	k _{co} *	17.266	13.491	1.592
		P.I.	1.317	0.003	1.054
	INM1	k _{co} *	10.307	2.204	0.950
		P.I.	1.256	0.000	1.005
	INM2	k _{co} *	12.464	1.944	1.149
		P.I.	1.258	0.000	1.006
$\frac{\sigma_n}{G_m} = 0.03$	MLIM	k _{co} *	24.085	33.297	2.221
		P.I.	1.445	0.015	1.157
	INM1	k _{co} *	10.023	5.199	0.924
		P.I.	1.267	0.001	1.014
	INM2	k _{co} *	13.459	2.693	1.241
		P.I.	1.266	0.000	1.013

σ_n : standard deviation of noise
 G_m : maximum sampled value of impulse response
 k_{co}^* : equivalent gain in continuous system (=k_{so}/T_s)
 trial time : N = 50

第7章 2次系と遅れ要素による近似

§7.1 序

前章まではすべて制御系を2次系で近似できる場合について考えてきた。

しかし、立上りの非常に遅い高次系は2次系で近似するにはかなりの無理が生ずる場合がある。

従来このような系に対しては、(1次系)+(遅れ要素)で近似することが行なわれ、また、それによる制御装置の設計も経験則として求められていた。また、化学プロセスなどでよく遭遇する高次系は(2次系)+(遅れ要素)でかなりうまく近似できることが知られている。

そこで本稿でも遅れ要素を導入することにより立上りの遅い高次系にも適用できるモデルを考えたい。すなわち、前章までの等価的離散値系のパルス伝達関数 $G_A(z)$ として、(7-1)式のような(2次系)+(遅れ要素)を選んだ場合について、そのパラメータの決定法とその高次系の近似系としての良さの評価を行なった。ただし、ここで取扱う遅れ要素としては、(7-1)式からも明らかのように、サンプリング周期の整数倍の遅れのみを考える。

$$G_A(z) = \frac{\alpha_3 \cdot z^{-(l+1)}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}} \quad (7-1)$$

(l: 非負の整数)

遅れをもつ系の制御は一般にむずかしいとされているが、離散値系でサンプリング周期の整数倍の遅れのみを考える場合は比較的容易である。

また、高次系の近似系としての良さの評価は、遅れのある場合の *Discrete Maximum Principle* による制御則を用いた。

§ 7.2 遅れのパラメータの決定

測定により得られる制御対象のインパルス応答のサンプル値から、(7-1)式で仮定したパルス伝達関数のパラメータを決定する際、まず、遅れのパラメータ ℓ を決定し、そのあとで、2次系のパラメータ α_i ($i=1, 2, 3$) も決定する方法を採用する。この ℓ の決定法は非常にむずかしく、おそらく絶対的な決定法というのは存在しないと思われる。

そこで、 ℓ を比較的簡単に決定するための一つの目安となるものを考えよう。

まず、直達分のない2次系のインパルス応答は(7-2)式の f に表わされる。

$$f(\tau) = A \{ \exp(s_1 \tau) - \exp(s_2 \tau) \} \quad (7-2)$$

ただし、 s_1, s_2 : 特性根, A : 係数 (定数)

そこで、特性根が実根、複素根の場合に分けて考えてみる。

i) s_1, s_2 が2実根の場合

$$s_1 = -\sigma_1, \quad s_2 = -\sigma_2 \quad (0 < \sigma_1 < \sigma_2)$$

とすると、そのインパルス応答の τ に関する導関数 $f_r'(\tau)$ は次式で表わされる。

$$f_r'(\tau) = A \{ -\sigma_1 \cdot \exp(-\sigma_1 \tau) + \sigma_2 \cdot \exp(-\sigma_2 \tau) \} \quad (7-3)$$

ii) s_1, s_2 が複素根の場合

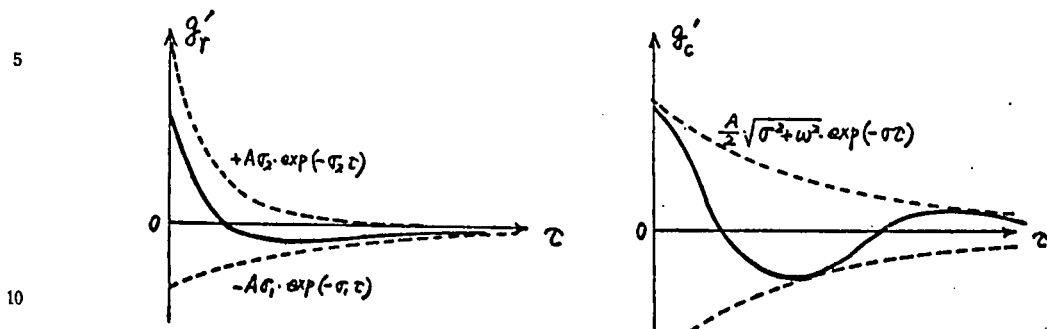
$$s_1 = -\sigma + j\omega, \quad s_2 = -\sigma - j\omega \quad (\sigma > 0)$$

とすると、そのインパルス応答の τ に関する導関数 $f_c'(\tau)$ は次式で表わされる。

$$f_c'(\tau) = \frac{A}{2} \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \cdot \exp(-\sigma \tau) \cdot \cos(\omega \tau + \tan^{-1} \omega / \sigma) \quad (7-4)$$

$$t = T^{-1}, \quad 0 < \tan^{-1} \sigma/\omega < \pi/2$$

(7-3), (7-4) 式の根拠略図を示したのが図 7-1. である。



(a) 実根の場合

(b) 複素根の場合

図 7-1 インパルス応答の導関数

図 7-1. から明らかなように、いずれも（複素根の場合は少なくとも $t=0$ からインパルス応答が最大値をとる t の値までの範囲内では） $t=0$ にあって、インパルス応答はその導関数が最大となることが分かる。

以上のことから、図 7-2 に

示す高次系のインパルス応答を（2次系）+（遅れ要素）で近似するとき、その微係数が最大となるサンプル時刻を遅れ時間の目安に考えることにする。

以下にその具体的方法を示す。

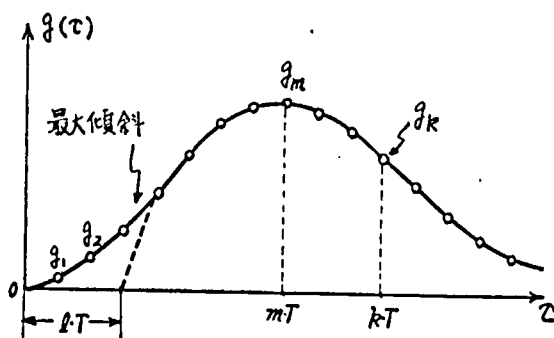


図 7-2 高次系のインパルス応答

[そのⅠ]

図 7-2 において、次式に示すインパルス応答の変化分を、 g_i がインパルス
 応答の最大値になるまで計算してその最大値 d_{imax} と求める。そして、その時

$$d_i \triangleq g_{i+1} - g_i \quad (i=0, 1, 2, \dots) \quad (7-5)$$

のサンプル時刻を $i_{max} \cdot T$ とするとき、遅れ要素のパラメータ l と

$l = i_{max}$ と決定する方法。

なお、 d_i を d_{imax} までではなく、 g_i が最大となるまで計算していく
 のはインパルス応答のサンプル値に重畳するノイズの影響を考慮するためである。

これは最も簡単な方法の一つと思われるが、サンプル時刻 $(l+1)T$
 における値がなめらかにつながらなければ遅れ時間が大きい時には特に
 近似が悪くなる場合がある。

[そのⅡ]

つぎに、2次系のインパルス応答の立ち上がりから最大値までは2次式で
 かなりうまく近似出来ることを用い、手順は少し複雑になるがよりよい近似
 の得られる方法について述べる。

まず、そのⅠと同じように (7-5) 式により d_i を計算し、その最大値
 d_{max} と求め、そのときのサンプル時刻を iT とする。また、インパルス応答
 の最大値を与えるサンプル時刻を $m \cdot T$ 、その時の値を g_m とするとき、
 (7-6) 式のような2次式を考え、これが $\tau = iT$ で g_i 、 $\tau = m \cdot T$

で g_m と通), しかも $\tau = mT$ の近傍で (τ は T の整数倍のみを通るので) g が最大値をとる方に a, b を決定する。(図7-3 参照)

$$g = a \cdot \tau \cdot (\tau - b \cdot T) \quad (7-6)$$

手順としては, まず, $l=0$ とおき, (7-7)式を計算し,

$b < 2(m-l)$ ならば, l に 1 を加えたものと l とし,

さらに (7-7)式を計算し,

$b > 2(m-l)$ とする

までの手順を続け,

初めて, $b > 2(m-l)$ と

なる l の値が 1 を減じたものと選べのパラメータ l と決める方法。

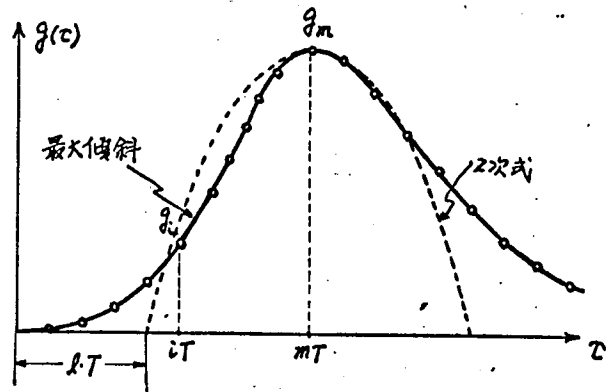


図7-3 高次系のインパルス応答の近似

$$b = \frac{g_m \cdot (i-l)^2 - g_i \cdot (m-l)^2}{g_m \cdot (i-l) - g_i \cdot (m-l)} \quad (7-7)$$

またこのとき, サンプル時刻 $\tau = lT \sim iT$ までのインパルス応答の値を次式により修正しておく。

$$g_{l+k} = \frac{g_m \cdot k \cdot (k-b)}{(m-l)(m-l-b)} \quad (7-8)$$

($k = 0, 1, \dots, (i-l)$)

ただし, b は (7-7)式により計算されるものである。

この方法を用いるとかなり広い範囲の高次系のインパルス応答を(2次系)+(遅れ要素)で十分な精度で近似できる。(5.7.4参照) 以下ではこの方法(そのII)を用いて遅れ要素の決定を行なうものとする。

5.7.3 2次系のパラメータの決定

遅れ要素のパラメータが前節の方法、あるいは他の何らかの適当な方法により決定されると、(それに伴) サンプル時刻 lT 付近のサンプル値の修正を含む) 残りの2次系のパラメータ α_i ($i=1, 2, 3$) は第4章で述べた INM2 が殆んどそのまま利用できる。すなわち、インパルス応答のサンプル値の測定値と h_k ($h_k = g_k + \varepsilon_k$; g_k : サンプル値の真値, ε_k : ノイズ, $k=1, 2, \dots, n$) とし、遅れ要素を l とすると、まず、 $\hat{\alpha}_3$ を (7-9), (7-10) 式により求め、それを (7-11), (7-12) 式に代入して、 $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ をそれぞれ求めればよいことになる。

$$\hat{\alpha}_3^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m_1} h_{i+l}^2 \cdot (h_{i+l+1}^2 - h_{i+l} \cdot h_{i+l+2}) \cdot \operatorname{sgn}(h_{i+l}^2 - h_{i+l} \cdot h_{i+l+1})}{\sum_{i=1}^{m_1} |h_{i+l+1}^2 - h_{i+l} \cdot h_{i+l+2}|} \quad (7-9)$$

($m_1 = \lfloor (n-l)/3 \rfloor$)

$$\hat{\alpha}_3 = \sqrt{\hat{\alpha}_3^2} \quad (7-10)$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{m_2} (\hat{\alpha}_3 \cdot h_{j+l} - 2 h_{j+l} \cdot h_{j+l+1})}{\sum_{j=1}^{m_2} h_{j+l}^2} \quad (7-11)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\sum_{j=2}^{m_2} (-\hat{\alpha}_3 \cdot h_{j+l} + h_{j+l} \cdot h_{j+l+1}) \cdot \operatorname{sgn}(h_{j+l} \cdot h_{j+l-1})}{\sum_{j=1}^{m_2} |h_{j+l} \cdot h_{j+l-1}|} \quad (7-12)$$

($m_2 = \lfloor (n-l)/2 \rfloor$)

§7.4 高次系の近似例

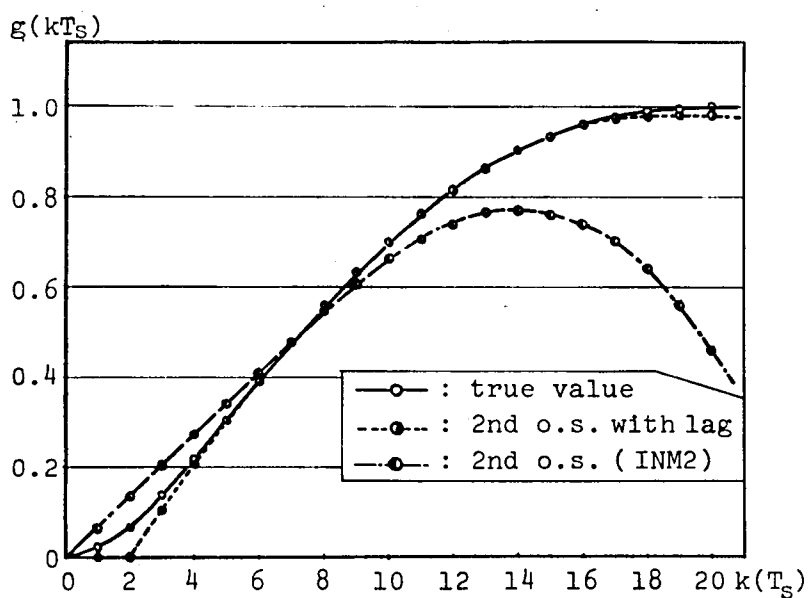
高次系を (7-1) 式のような (二次系) + (遅れ要素) で近似し, $T_s = 2$, $T_d = 3$ 述べていた方法によりそのパラメータを求める方法で, この程度高次系のインパルス応答が近似できるときを示すため, その近似例を以下に示す。

図 7-4 は系の伝達関数が $G(s) = 1/\{(s+1)(s+2)(s+4)\}$ で示されるような三次系のインパルス応答とその (二次系) + (遅れ要素) による近似, および第 4 章の INM2 による近似を示したものである。図 (b), カンピング周期 $T_s = 0.1$ 秒の場合のように比較的立上りの速いような場合には, 第 4 章の INM2 でもかなりうまく近似できるが, 図 (a), $T_s = 0.05$ 秒の場合のように立上りがこの程度ゆるやかになると INM2 だけではやはり近似しきれないようになってしまう。それに対し, 遅れ要素を考慮に入れるといずれの場合も非常によく近似できることが分かる。

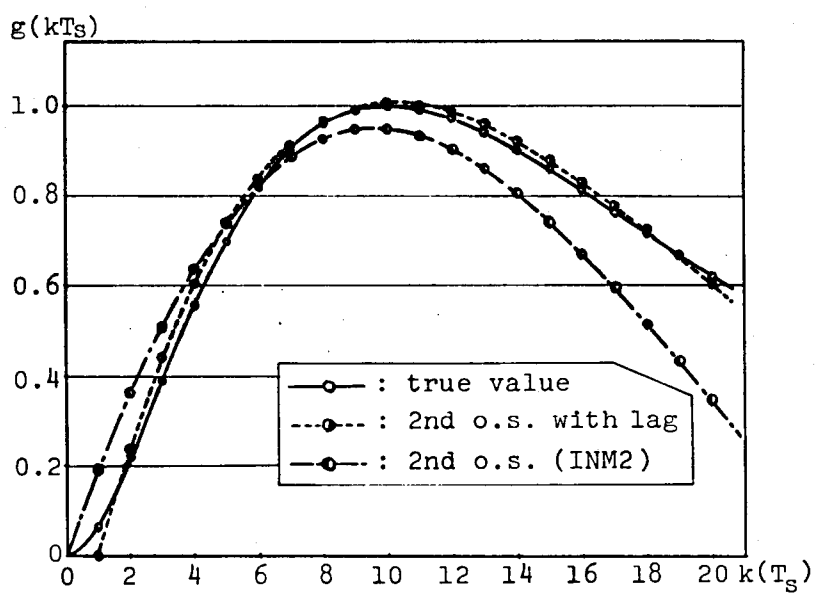
図 7-5 は $G(s) = 1/(1+sT_d)^3$ の系において, T_d/T_s の比を変えた時のインパルス応答とその (二次系) + (遅れ要素) による近似を示したものである。

図 7-6 は $G(s) = 1/(1+sT_d)^n$ で表わされる高次系において, T_d/T_s と固定して, n を 3, 4, 5, 6 と変えた場合のインパルス応答とその (二次系) + (遅れ要素) による近似を示したものである。

以上の図はほんの一例にすぎないが高次系のインパルス応答とこの小さい所 (カンピング値の値も小さい所) を除いて非常によく近似できていることが分かる。



(a) $T_s = 0.05$ の場合



(b) $T_s = 0.1$ の場合

図 7-4 $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+8)}$ のインパルス
応答とその近似

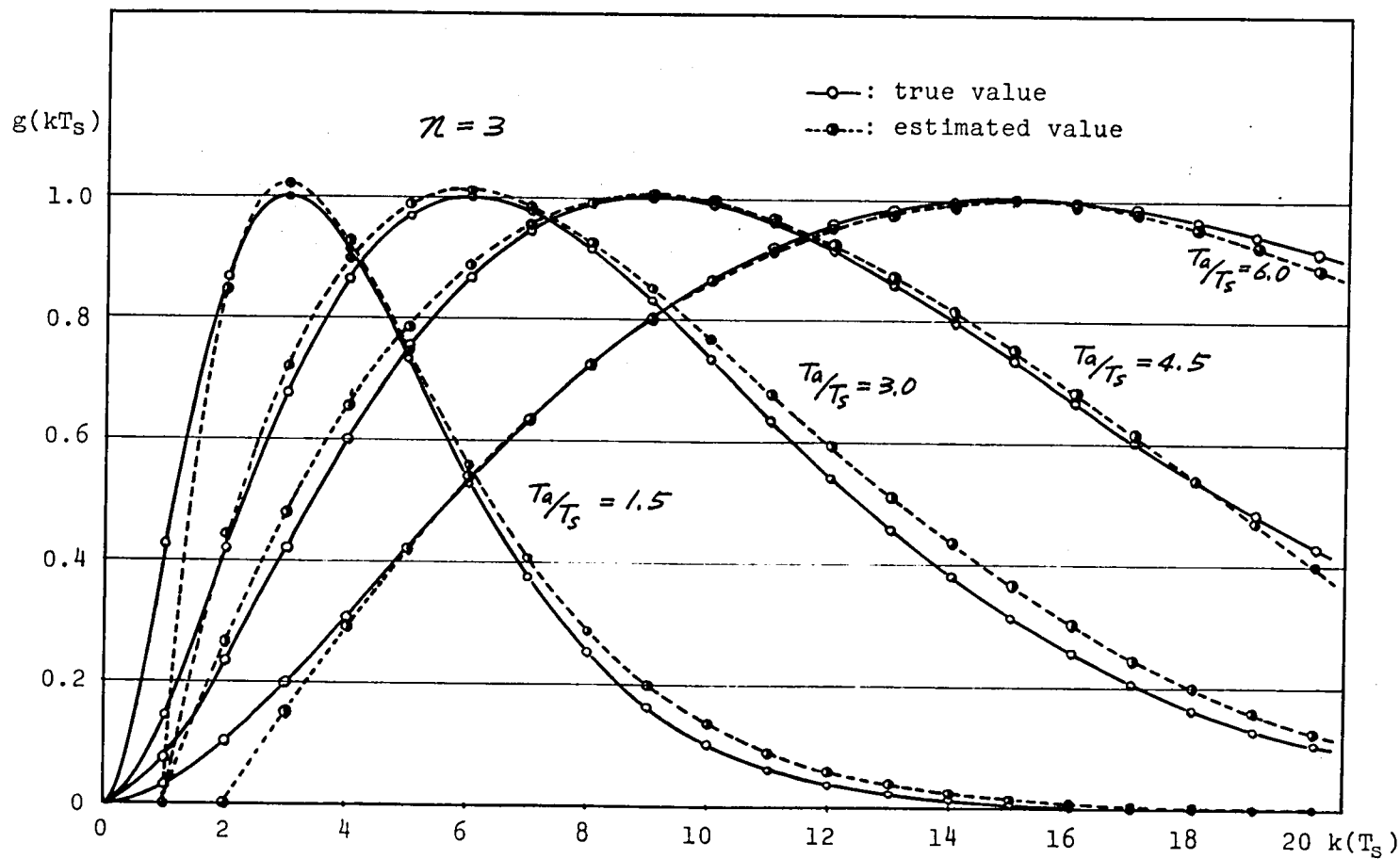


図 7-5 $G(s) = \left(\frac{k}{1+sT_d}\right)^3$ の系において, T_d/T_s の比を変えた時のインパルス応答と
その(2次系)+(遅れ要素)による近似

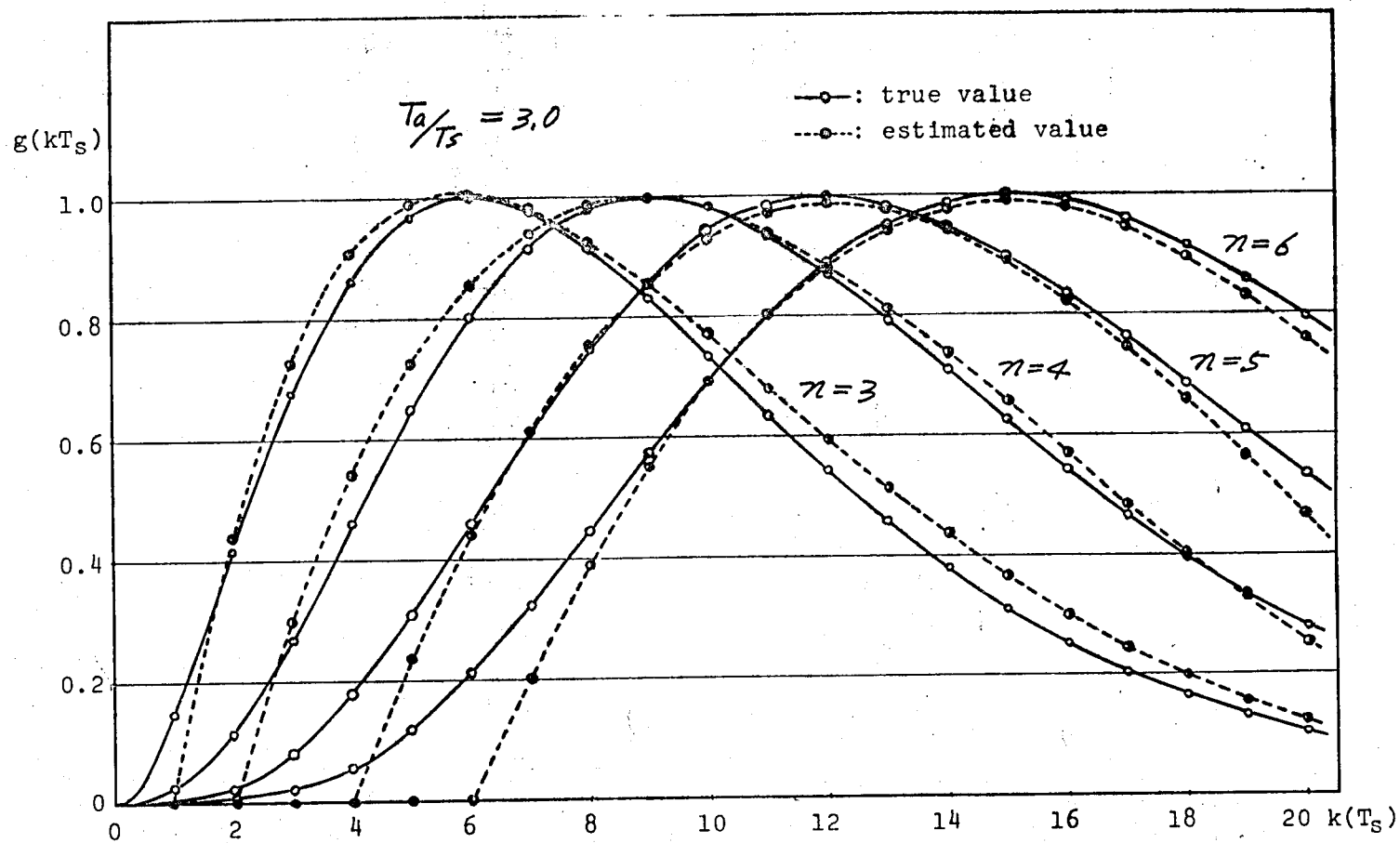


図 7-6 系の伝達関数が $G(s) = \left(\frac{K}{1+sT_a} \right)^n$ で表わされる高次系のインパルス応答と

その(2次系)+(遅れ要素)による近似

§ 7.5 遅れのある系の最適制御

前節まで述べてきたような高次系を(二次系)+(遅れ要素)で近似し、そのパラメータを推定する方法を提案したが、その推定法の良さを評価するため以下に述べるような遅れのある系の最適制御を考えることにする。

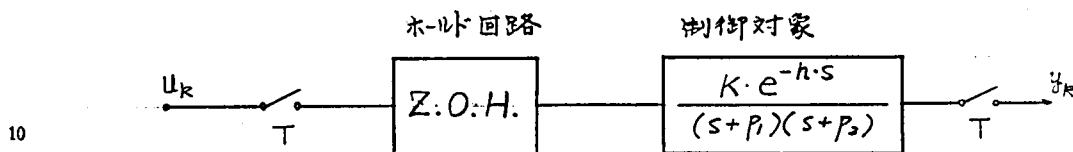


図 7-7 デジタル的な制御の基本構成図

いま、図 7-7 のような制御対象の動特性を(二次系)+(遅れ要素)で近似し、それと 零次ホールドをつけた、デジタル的な(離散値系の)制御を考えることにする。なお、零次ホールドを含めた系の伝達関数 $G(s)$ は (7-1) 式で表わされる 等価的離散値系のパルス伝達関数 $G_k(z)$ より算出される

ものと見て、遅れ時間を表わすパラメータ h は サンプリング周期 T の整数倍である場合のみを考えることにする。

$$G(s) = \frac{K \cdot e^{-h \cdot s}}{(s+p_1)(s+p_2)} \cdot \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right) \quad (7-13)$$

まず、(7-13) 式の $G(s)$ で表わされる系を Jordan Canonical Form に変換した後、離散値系の状態方程式表示にする。(付録 IV 参照)

なお、 $H(s) = (1 - e^{-sT})/s$ の部分は入力を階段状入力に近似(あるいは表現)するため、考える物であって、状態変数表示する際には直接関係のない項である。

$$\begin{cases} X_{k+1} = P \cdot X_k + Q \cdot u_{k-m} \\ Y_k = C^T \cdot X_k \end{cases} \quad (7-14)$$

5 $K \cdot L,$

$$P = \begin{bmatrix} e^{-\rho_1 T} & 0 \\ 0 & e^{-\rho_2 T} \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{K}{\rho_2 - \rho_1} \begin{bmatrix} (1 - e^{-\rho_1 T})/\rho_1 \\ (1 - e^{-\rho_2 T})/\rho_2 \end{bmatrix},$$

10 $C^T = [1, -1], \quad m = \frac{h}{T}, \quad \left(\begin{array}{l} T: \text{サンプリング周期} \\ m: \text{非負の整数} \end{array} \right)$

(7-15)

つまり, (7-16)式のような二次形の評価規範を考え, (7-14)式の条件のもと,
(7-16)式と最小にするような離散値系の最適制御問題を考える。

15

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (X_k^T \phi \cdot X_k + u_k^2) \quad (7-16)$$

$K \cdot L,$

$$\phi = C \cdot C^T \cdot f, \quad (f > 0; \text{スカラー}) \quad (7-17)$$

20 この時, 最適制御信号 u_k^* は Discrete Maximum Principle⁵⁵⁾
によりつぎのように与えられる。⁵⁰⁾

25

$$u_k^* = K_k^{*T} \cdot X_k \quad (7-18)$$

$K \cdot L,$

$$K_k^{*T} = \begin{cases} -Q \cdot M \cdot (\alpha)^{k+1} \cdot P^{m-k} & (0 \leq k \leq m-1) \\ -Q \cdot M \cdot (\alpha)^{m+1} & (k \geq m) \end{cases} \quad (7-19)$$

30

ただし,

$$X \triangleq (I + g \cdot g^T \cdot M)^{-1} \cdot P \quad (7-20)$$

すなわち, M は (7-21)式で表わされる方程式の解である。(Riccati Matrix M)

$$M = \phi + P^T \cdot M \cdot (I + g \cdot g^T \cdot M)^{-1} \cdot P \quad (7-21)$$

ところで, 一般の高次系を (7-13)式に示すおの (2次系)+(遅れ要素)で近似する場合
を考えているので, (7-18)式のおの 状態変数 フィードバック により 制御信号を求め
おとしても 実際には 使えない。そこで ざの おの 出力 フィードバック により 制御
信号を得るための 適当な 変換が必要になる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}_k = V \cdot \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}_k \quad (7-22)$$

ただし,

$$V = \frac{1}{p_2 - p_1} \begin{pmatrix} p_2 & 1 \\ p_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7-23)$$

(付録 V 参照)

(7-18), (7-22)式より,

$$u_k^* = K_k^{*T} \cdot V \cdot \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}_k \quad (7-24)$$

として 最適制御信号と決定する。なお, 出力の時間に関する一回微分
 \dot{y}_k としては 実際には 一次差分で近似するにとくする。すなわち,

$$\dot{y}_k \cong (y_k - y_{k-1}) / T \quad (7-25)$$

したがって, 評価規範も 状態変数の代りに 出力を用いた表示にする必要がある。

$$x_k^T \phi \cdot x_k = x_k^T c \cdot c^T f \cdot x_k = y_k^2 f \quad (7-26)$$

であるから、評価規範 J は次式のようになる。

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (y_k^2 f + u_k^2) \quad (2-27)$$

§7.6 高次系の近似系としての良さの評価

つぎに、高次系の一例として制御対象が図7-7で扱った次系で表わされる場合について、つぎに示す4種の条件で制御する場合について考察し、それらを前節で述べた評価規範により比較検討した。また、それによって、(2次系)+(遅れ要素)で近似する方法の有用性を確かめた。なお、以下で述べる方法はすべて、図7-7に示すようなデジタル的な制御方式をとるものとする。

(1) 3次系の動特性が正確に分っており、しかもその内部状態、すなわち、離散値系の状態変数表示をした場合の状態ベクトルがすべての時間にわたって測定可能であり、それが制御に利用出来るという条件のもとでの最適制御。(以下では、true optimal control (state vector) と呼ぶ)

(2) 3次系の動特性は正確に分っているが、その内部状態は不明で、系の出力のみが測定可能で制御に利用出来るという条件のもとでの最適制御。(以下では、sub optimal control (output) と呼ぶ)

(3) 3次系の動特性も不明で、系の出力のみが測定可能である場合、その系の動特性も(7-1)式に示す(2次系)+(遅れ要素)で近似してそのパラメータを求め、これをもとにして行なう最適制御。

(以下では, 2nd order system with transport lag と呼ぶ)

- (4) 3次系の動特性も不明な系の出力のみが測定可能である場合, その系の動特性を第4章で述べた改良した新しい方法 INM2 により推定し, 5 等価的2次系のパルス伝達関数を求め, これをもとに行なう最適制御

(以下では, 2nd order system (INM2) と呼ぶ)

す。図7-7に示すようなデジタル的な制御を考慮したホールド回路を

- 10 含めた3次系の伝達関数は(7-28)式で表わされる。

$$G'(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)} \cdot \left(\frac{1-e^{-sT}}{s} \right) \quad (7-28)$$

- この系を前節で述べたように Jordan Canonical Form に変換し, 離散値 15 系の状態変数表示すると次のようになる。(付録 IV 参照)

$$\begin{cases} X_{k+1} = P \cdot X_k + Q \cdot U_k \\ Y_k = C^T \cdot X_k \end{cases} \quad (7-29)$$

20 したがって,

$$P = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2T} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4T} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1-e^{-T} \\ 1-e^{-2T} \\ 1-e^{-4T} \end{bmatrix}, \quad (7-30)$$

25 $C^T = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6} \right)$

に, 評価規範としては有限段の制御を考慮して,

$$J = \sum_{k=0}^N (y_k^2 \cdot f + u_k^2) \quad (7-31)$$

- 30 を用いることにする。以下では, $N=50$, $f=100$ とした場合を考慮する。

この時, true optimal control signal u_k^o は Discrete Maximum Principle⁵⁵⁾ に従い,

$$u_k^o = K_k^{oT} \cdot x_k \quad (7-32)$$

ただし,

$$K_k^{oT} = -g^T \cdot M_k \cdot (I + g \cdot g^T \cdot M_k)^{-1} \cdot P \quad (7-33)$$

また, M_k は次式に依り, $k = N-1$ から $k=0$ までを求め記憶に置き,

そして (7-32) 式に適用する。

$$M_k = \phi + P^T \cdot M_{k+1} \cdot (I + g \cdot g^T \cdot M_{k+1})^{-1} \cdot P \quad (7-34)$$

$$\phi = C \cdot C^T \cdot f, \quad f = 100, \quad M_N = \phi \quad (7-35)$$

つまり sub optimal control signal u_k^s は次式より求まる。

$$u_k^s = \begin{cases} 0 & (k=0, 1) \\ K_k^{oT} \cdot \nabla \cdot \begin{bmatrix} y_k \\ (y_k - y_{k-1})/T \\ (y_{k-2}y_{k-1} + y_{k-2})/T^2 \end{bmatrix} & (k \geq 2) \end{cases} \quad (7-36)$$

ただし,

$$\nabla = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{付録 V 参照}) \quad (7-37)$$

(3) の 2nd order system with transport lag の場合は前節の

手法を殆んどそのまま用いる。ただし, 評価規範は (7-31) 式と同じものを採用する。

また, 制御信号を求める式におけるマトリックス M は, P, g, C の係数マ

トリックスは前節で述べたものを用いて, (7-34), (7-35) 式に依り求まる。

(4)の2nd order system (INM2)は(3)の場合と殆んど同じで、 $k, k', m=0$ とおくだけでいい。なお、(7-36)式の場合と同じおき、(3)、(4)とも、最初の制御段では、 y_1 が不明であるため制御信号は0とする。

図7-8は、サンプリング周期が $T=0.1$ 秒、系の内部状態の初期値が、 $x_2(0)=x_3(0)=0.0$, $x_1(0)=1/C_1$, $y(0)=1.0$ の場合 (C_1 は出力マトリクス C の第1成分)の前記4種の条件による最適制御の比較を示したものである。この図はそれぞれの方法による出力 y (縦軸左側に目盛を示す)と制御入力 u (縦軸右側に目盛を示す)の時間変化の様子を示している。ここで制御入力 u はその値の時間変化の様子と、各種方法による比較を明確にするためになめらかな曲線で結んでいるが、実際にはデジタル的な制御を考えているので各サンプリング時点間には一定値をとる階段状信号である。このことはつぎの図7-9の場合も同じである。

図より、(3)の(2次系)+(遅れ要素)における近似も、(4)の2次系 (INM2)における近似も真の最適制御にかなり近いことが分かる。これは図7-4(b)のインパルス応答の近似のグラフからも予想される結果である。なお、この場合、(2)の sub optimal control よりも(3)の方が評価規範が小さく良い結果になっているが、これは(2)の方法が3次系の出力フィードバックであるため最初の2段階は制御を行わないのに対し、(3)の方法は2次系であるため最初の一段だけ制御を行わないということより、近似の程度がよほどこのようになるのである。したがって、さらに高次系になると、この影響が大きくなることも考えられるが、これも(2次系)+(遅れ要素)で近似することの有用性を意味している。

図7-9はサンプリング周期が $T=0.05$ 秒、内部状態の初期値が、 $x_1(0)=x_3(0)=0.0$, $x_2(0)=1/C_2$, $y(0)=1.0$ の場合についての前図と同様のグラフ

である。この場合は図7-4 (a) から分かるようにインパルス応答がかなり違っているので
(4)の方法では真の最適制御とは全く異なる制御になっている。すなわち、
制御入力 u が正、負逆で、初期値のモードにもよるが制御しないうかがえて
5 ぶい ± 1) = ± 1 を示している。このことは(3)の方法についてもいえるが u の絶対値
も小さく、それほど悪くはならないようになっている所に遅れ要素を導入した意味がある。
また、以上のことから明らかなように同じ系であってもサンプリング周期の選び方によ
10 りかなり異なる様子を呈することが分かる。

表7-1 にサンプリング周期が $T=0.05$ 秒と $T=0.1$ 秒の場合について、初期値
のモードが異なる時の4種の方法による最適制御の評価規範の値を示す。

15 この表からも $T=0.1$ 秒の場合にはいずれの初期値モードにおいても(3)、(4)の
方法はかなり真の最適制御に近いことが分かる。しかし、 $T=0.05$ 秒の場合には、
(4)のINM2による方法ではもはや制御の意味がなっていない結果になっている。

20 それに対し、(3)の方法では真の最適制御に比べ悪くはなっているがそれほどひどく
はなく実用的に意味があるといえる。

表7-2 はインパルス応答にノイズがあるより現実的な場合についての計算機
シミュレーションの結果である。ノイズの大きさはインパルス応答の最大値に対し、その
25 標準偏差が1%、2%、3%の場合を取扱った。1つの条件に対する実験試
行回数は50回である。このようにノイズがあっても(3)の(2次系)+(遅れ要素)による
方法は十分有効であり、 $T=0.1$ 秒の場合にはノイズがあってもかなりよい結果
30 になる場合もあることを示している。

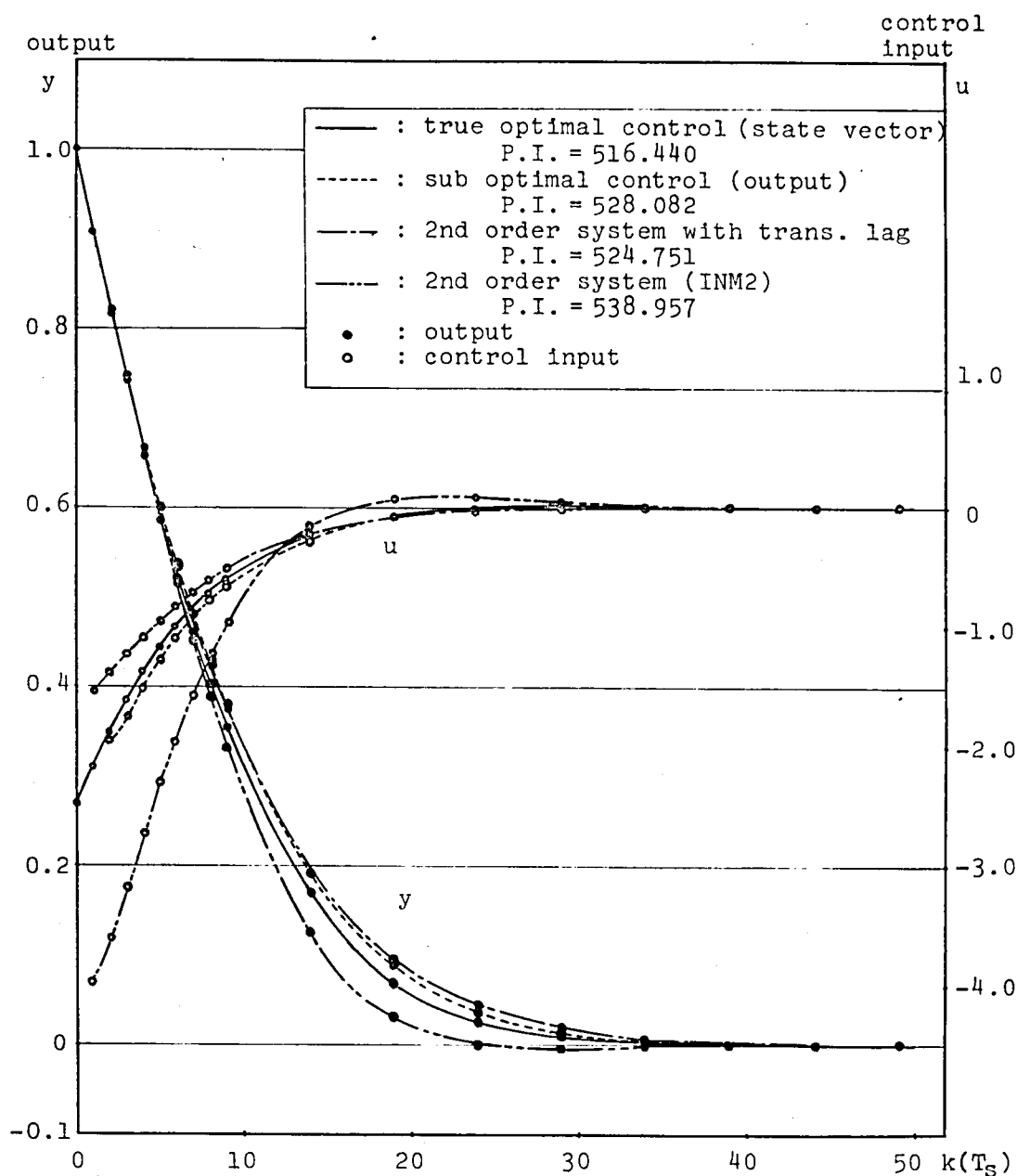


図 7-8 伝達関数が $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)}$ で表わされる系の各種

方法による最適制御の出力 y と制御入力 u の時間変化 (その I)

$$\left(T = 0.1, \text{ 初期値モード (1): } x_2(0) = x_3(0) = 0.0, \right. \\ \left. x_1(0) = 1/C_1, y(0) = 1.0 \text{ の場合} \right)$$

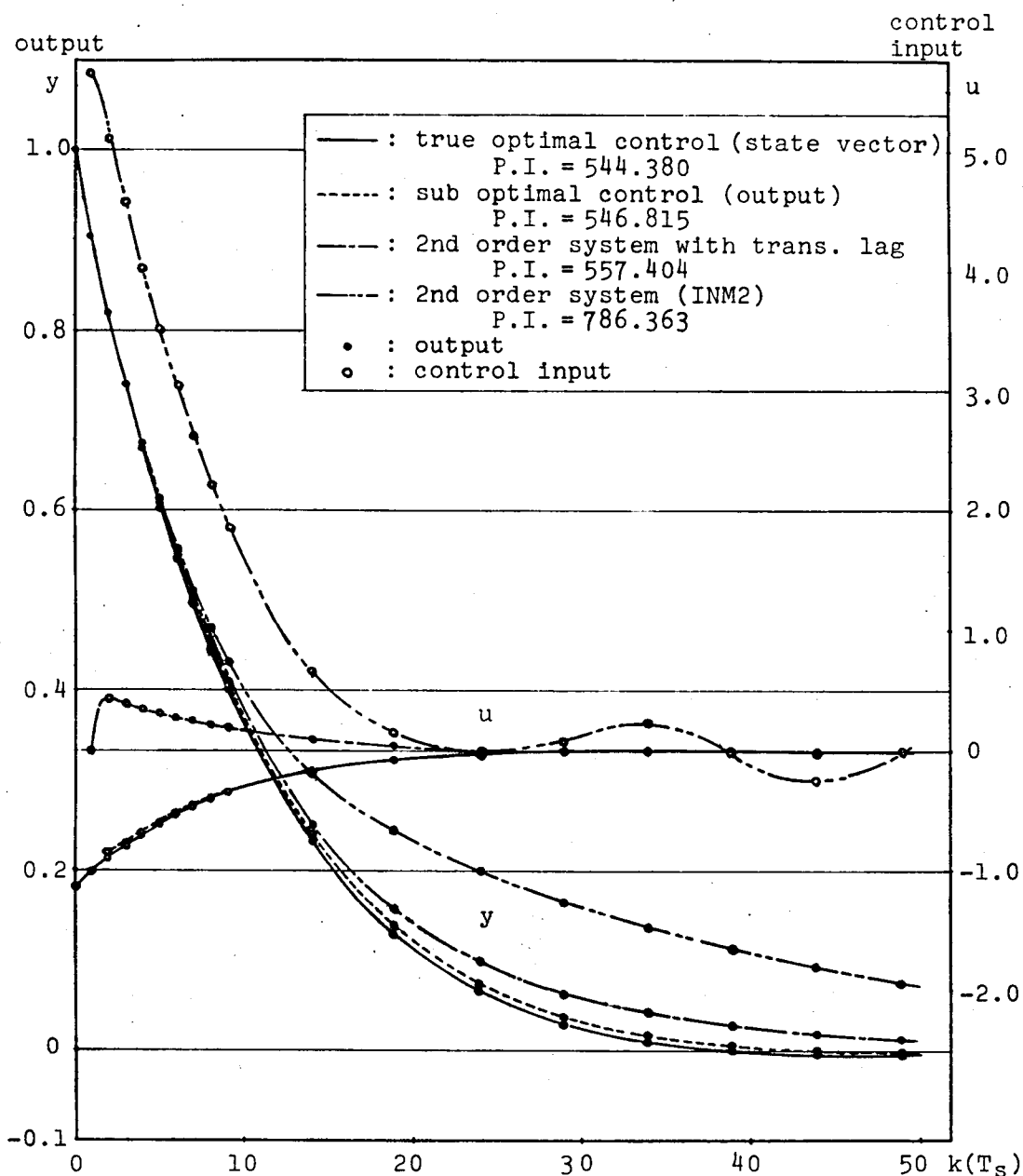


図7-9 伝達関数が $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)}$ で表わされる系の各種
 方法による最適制御の出力 y と制御入力 u の時間変化 (そのII)
 $\left(T = 0.05; \text{初期値モード(2): } x_1(0) = x_3(0) = 0.0, \right.$
 $\left. x_2(0) = 1/c_2, y(0) = 1.0 \text{ の場合} \right)$

表7-1 伝達関数が $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)}$ の系の各種
 方法による最適制御の比較
 (インパルス応答にノイズのない場合)

Method of Estimation or Control	Sample Period	Initial Values Mode *		
		(1)	(2)	(3)
True Optimal Control (state vector)	T=0.05	980.024	544.380	302.950
	T=0.1	516.440	299.723	181.415
Sub Optimal Control (output)	T=0.05	992.726	546.815	303.200
	T=0.1	528.082	301.764	181.689
Second Order System with Transport Lag	T=0.05	996.981	557.404	359.375
	T=0.1	524.751	302.239	192.104
Second Order System (INM2)	T=0.05	1114.811	786.363	926.014
	T=0.1	538.957	302.020	201.223

* : Initial Values Mode ;

(1) : $x_2(0) = x_3(0) = 0.0$, $x_1(0) = 1/c_1$, $y(0) = 1.0$

(2) : $x_1(0) = x_3(0) = 0.0$, $x_2(0) = 1/c_2$, $y(0) = 1.0$

(3) : $x_1(0) = x_2(0) = 0.0$, $x_3(0) = 1/c_3$, $y(0) = 1.0$

表 7-2 伝達関数が $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)}$ で表わされる系において,
インパルス応答にノイズのある場合の (2次系)+(遅れ要素),
2次系 (INM2) の両推定法による最適制御の比較

(ただし, 初期値モード (2):
 $X_1(0) = X_3(0) = 0.0, X_2(0) = 1/C_2, y(0) = 1.0$)

Sample Period	Standard Deviation of Noise	Method of Estimation			
		2nd Order System with Transport Lag		2nd Order System (INM2)	
		mean	s.d.*	mean	s.d.*
T=0.05	$\frac{\sigma_n}{G_m} = 0.01$	569.134	23.443	729.406	333.292
	$\frac{\sigma_n}{G_m} = 0.02$	598.440	48.028	663.722	191.703
	$\frac{\sigma_n}{G_m} = 0.03$	623.885	60.250	733.607	263.853
T=0.1	$\frac{\sigma_n}{G_m} = 0.01$	303.087	1.981	303.216	2.445
	$\frac{\sigma_n}{G_m} = 0.02$	302.795	1.570	307.778	6.490
	$\frac{\sigma_n}{G_m} = 0.03$	302.556	1.112	312.991	8.925

* : standard deviation of Performance Index

G_m : maximum sampled value of impulse response

σ_n : standard deviation of noise

結 言

本論文では、零交叉波を用いた相関法による動特性測定に関する基礎的問題を解析し、それに基づくインパルス応答の測定装置の主要部分、すなわち、2値信号の遅延装置とランダムノイズ発生器の試作を行なった。また、このような相関法により得られたインパルス応答から制御系のパルス伝達関数を推定するための新しい方法を提案し、その推定機構としての良さを評価を種々の方法により行ない、その有用性を明らかにした。以下に各章で得た成果を要約する。

第2章では、制御系の伝達関数を推定するのに正規性雑音と探索信号として用い、その入出力と共に零交叉波に変換して相関法を用いた場合の推定誤差の程度を明らかにした。また、探索信号としてランダム、テレグラフ、ノイズを用いた場合には、その入出力を零交叉波に変換にもゲイン以外のすべての情報は失われることを明らかにした。また、ランダム、テレグラフ、ノイズを用いて相関関数を測定する時のデータの必要長さは、同じ許容誤差に対して白色雑音を用いた場合の約半分であるという結果を得た。

第3章では、インパルス応答の測定に必要な2値信号の多出力可変遅延装置を試作した。これは遅延時間の相異なる10個の遅延出力（原理的には、遅延線の記憶容量以下であれば任意に与えられる）が同時に得られる装置で、遅延時間は3桁の有効数字（偶数のみ）と倍率（10進）を装置前面のパネル面上で設定出来るように作られている。（2 msec ~ 99.8 sec）これを用いてインパルス応答を求めるのと遅延時間の異なる10個の点と同時に得られるので動特性が全く未知の系

でも1回の測定で適当な遅延時間のミゼリ幅が合がり便利である。また、探索信号用として、ランダム、テラグラフ、ノイズ発生器を試作し、これらの十分な精度で動作することを確認した。

5 第4章では、系のパルス伝達関数を2次系で近似し、そのパラメータとインパルス応答のサンプル値から推定する新しい方法を提案した。これは、インパルス応答のサンプル値をいくつかの組に分けてパラメータ推定し、これらの重み付平均により最終的な推定値を得る方法で、従来の最短左側インバースの方法よりはデータ処理が簡単で、しかも実用的範囲ではノイズに対しても強いことを近似式による解析的方法と
10 計算機シミュレーションによる方法で確かめた。また、普通サンプリング周期(インパルス応答の測定における遅延時間のミゼリ幅に相当)は小さく推定誤差は小さいと考えるが、得られるサンプル値の個数が現実には有限個であることを考慮すると、最適なサンプリング周期が存在することになる。この最適サンプリング周期もサンプル値の個数をパラメータとして求めている。

20 第5章では、重み付平均による推定法において、その推定値の分散最小という意味での最適重みとやや一般的に論じ、その立場から第4章で提案した推定法で用いている重み付平均のアルゴリズムを評価し、実用的意味では準最適重みになっていることを示した。

30 第6章では、実際の系は連続系であるが測定が離散的であるため推定によって得られる結果は等価的離散値系のパルス伝達関数であるという連続-離散値系の問題を、システムは2次系で、制御装置は可変ゲインという非常に簡単な例について論じ、その問題点と解決法について述べた。

ここで、ある評価規範を最小にするという最適制御により得られたシステムが古典的制御理論の意味でも十分よい制御系になっているように、遂にその評価規範を決定するという手法を用いている。これはある意味で、現代
5 制御理論と古典的制御理論の融合といえる。そして、この評価規範を用いると、連続系と等価的離散値系の関係がうまくつき、離散値系の最適ゲインから簡単にそれと等価な連続系の最適ゲインが求められることを示した。また、第4章で提案した新しい推定法と従来の最短左側
10 インバースによる方法との比較を単にパラメータの推定値がその真値にどれ程近いかだけでなく、その推定値により得られた情報を用いていかによい制御性能が得られるかという制御系全体の評価規範により推定法の比較
15 と行なった。これによっても新しい推定法の有用性が確かめられた。

第7章では、2次系では近似しがたい高次系とか遅れの大きい系にも適用出来るように遅れ要素を導入して系のパルス伝達関数を(2次系)+(遅れ要素)
20 で近似した場合のパラメータの決定法とその推定機構としての良さについて検討した。遅れのパラメータは遅れ時間というものの考え方に任意的な性質があり、その決定法は非常にむずかしい問題で拡張カルマン・フィルターによる現代制御論
25 的な状態推定の手法を用いても必ずしも良い結果が得られるとはいえないのである。ここでは比較的簡単な1つの方法を提案し、それがかなりの範囲で使用にたえることをいくつかの例題で示した。また、遅れのパラメータが何んらかの方法で決定されると、残りの2次系のパラメータは第4章の方法が殆んどそのまま使えることを示した。

最後に、高次系の一例として3次系を選びこのデジタル的な制御を添えて、
離散値系の最適制御問題をいくつかの条件のもとで考察し、追加要素の導入
の効果を確かめた。また、合せてサンプリング周期が適切な場合にはINM2
でもかなりよい結果の得られることも確かめた。

謝 辞

本研究は京都大学工学部近藤文治教授の御指導の下に行なったもので
ある。終始適切な御指導御鞭撻を下された近藤教授に厚く御礼申
上げます。また、終始懇切丁寧な御指導御討論を頂き多大の御助言
を賜った安藤和昭助教授に心から感謝致します。また、大学院左
学中第3章の装置製作に多大の御協力を頂いた森本正幸氏に御礼申
上げます。さらに研究に際し色々御助力下さった近藤研究室関係者
一同に御礼申し上げます。そして最後に本研究を完成するにあたり、大
きく暖いお心使いと激励を頂いた岡山大学工学部佐野博也教授と
計測制御研究室の皆様には感謝致します。

付録 I. 入力の零点分布がポアソンの場合の Flip-Flop の出力の相関関数

いま、単位時間に落ちる零点の平均個数が α の零点分布をもつ Poisson Process $y(t)$ を考える。そして、つぎに示すような $P(n, \tau)$, $P_n(\tau)$ の量を考える。

$P(n, \tau)$: 与えられた時間間隔 $[t, t+\tau]$ に正確に n の零点が落ちる確率

$P_n(\tau)$: n 区間の確率密度関数。すなわち、時刻 t において零点が存在し、その後 n 番目の零点が時間間隔 $[t+\tau, t+\tau+d\tau]$ に存在する条件付確率が $P_n(\tau)d\tau$ で与えられるもの。

独立な Point Process に対してはこれらの間に (I-1) 式の関係が成り立つことが知られている。^{8), 9)}

$$P''(n, \tau) = \alpha \cdot \{ P_{n+1}(\tau) - 2 \cdot P_n(\tau) + P_{n-1}(\tau) \} \quad (I-1)$$

ただし、 $\left\{ \begin{array}{l} n \leq 0 \text{ に対しては } P_n(\tau) = 0 \text{ とする。} \\ P''(n, \tau) \text{ は } P(n, \tau) \text{ の } \tau \text{ についての 2 回微分を意味する。} \end{array} \right\}$

また、 $P(n, \tau)$ を用いると y の相関関数は次式で与えられることは明らかである。

$$\gamma(\tau) = 4\alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot P(n, |\tau|) \quad (I-2)$$

(I-1), (I-2) 式より,

$$\gamma''(\tau) = 4\alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n P_n(|\tau|) \quad (I-3)$$

(I-3)式を $t \geq 0$ の領域でラプラス変換し, さらに (I-4)式を考慮して,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\{r''(t)\} &= s^2 R(s) - s \cdot r(+0) - r'(+0) \\ r(+0) &= 1, \quad r'(+0) = -2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (I-4)$$

次式を得る.

$$s^2 R(s) = s - 2\alpha + 4\alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} P_n(s) \quad (I-5)$$

また, 独立な Point Process では (I-6) あたは (I-6)' 式が成り立つので, これを (I-5) 式に代入して (I-7) 式を得る.

$$P_n(t) = P_1(t) * P_1(t) * \cdots * P_1(t) \quad (I-6)$$

ただし, $*$: たたみ込み積分を表わす.

これをラプラス変換して,

$$P_n(s) = \{P_1(s)\}^n \quad (I-6)'$$

$$R(s) = \frac{1}{s} - \frac{2\alpha}{s^2} \cdot \frac{1 - P_1(s)}{1 + P_1(s)} \quad (I-7)$$

これより Poisson Process y の相関関数は

$$r_y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{R(s)\} = \exp(-2\alpha|t|) \quad (I-8)$$

さらに y を Flip-Flop に通した出力 z の相関関数は (I-7) 式にあたり,

$$\alpha \rightarrow \alpha/2, \quad P_1(s) \rightarrow P_2(s) = \{P_1(s)\}^2$$

といったものを逆ラプラス変換したものであから,

$$\begin{aligned}
 Y_z(\tau) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{s^2} \cdot \frac{1 - \{P_1(s)\}^2}{1 + \{P_1(s)\}^2} \right\} \\
 &= \exp(-\alpha|\tau|) \cdot \cos(\alpha\tau) \quad (I-9)
 \end{aligned}$$

- 5 これは入力の零点分布がポアソンの場合の Flip-Flop の出力の相関関数である。
 10 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500 501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600 601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700 701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900 901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000 1001 1002 1003 1004 1005 1006 1007 1008 1009 1010 1011 1012 1013 1014 1015 1016 1017 1018 1019 1020 1021 1022 1023 1024 1025 1026 1027 1028 1029 1030 1031 1032 1033 1034 1035 1036 1037 1038 1039 1040 1041 1042 1043 1044 1045 1046 1047 1048 1049 1050 1051 1052 1053 1054 1055 1056 1057 1058 1059 1060 1061 1062 1063 1064 1065 1066 1067 1068 1069 1070 1071 1072 1073 1074 1075 1076 1077 1078 1079 1080 1081 1082 1083 1084 1085 1086 1087 1088 1089 1090 1091 1092 1093 1094 1095 1096 1097 1098 1099 1100 1101 1102 1103 1104 1105 1106 1107 1108 1109 1110 1111 1112 1113 1114 1115 1116 1117 1118 1119 1120 1121 1122 1123 1124 1125 1126 1127 1128 1129 1130 1131 1132 1133 1134 1135 1136 1137 1138 1139 1140 1141 1142 1143 1144 1145 1146 1147 1148 1149 1150 1151 1152 1153 1154 1155 1156 1157 1158 1159 1160 1161 1162 1163 1164 1165 1166 1167 1168 1169 1170 1171 1172 1173 1174 1175 1176 1177 1178 1179 1180 1181 1182 1183 1184 1185 1186 1187 1188 1189 1190 1191 1192 1193 1194 1195 1196 1197 1198 1199 1200 1201 1202 1203 1204 1205 1206 1207 1208 1209 1210 1211 1212 1213 1214 1215 1216 1217 1218 1219 1220 1221 1222 1223 1224 1225 1226 1227 1228 1229 1230 1231 1232 1233 1234 1235 1236 1237 1238 1239 1240 1241 1242 1243 1244 1245 1246 1247 1248 1249 1250 1251 1252 1253 1254 1255 1256 1257 1258 1259 1260 1261 1262 1263 1264 1265 1266 1267 1268 1269 1270 1271 1272 1273 1274 1275 1276 1277 1278 1279 1280 1281 1282 1283 1284 1285 1286 1287 1288 1289 1290 1291 1292 1293 1294 1295 1296 1297 1298 1299 1300 1301 1302 1303 1304 1305 1306 1307 1308 1309 1310 1311 1312 1313 1314 1315 1316 1317 1318 1319 1320 1321 1322 1323 1324 1325 1326 1327 1328 1329 1330 1331 1332 1333 1334 1335 1336 1337 1338 1339 1340 1341 1342 1343 1344 1345 1346 1347 1348 1349 1350 1351 1352 1353 1354 1355 1356 1357 1358 1359 1360 1361 1362 1363 1364 1365 1366 1367 1368 1369 1370 1371 1372 1373 1374 1375 1376 1377 1378 1379 1380 1381 1382 1383 1384 1385 1386 1387 1388 1389 1390 1391 1392 1393 1394 1395 1396 1397 1398 1399 1400 1401 1402 1403 1404 1405 1406 1407 1408 1409 1410 1411 1412 1413 1414 1415 1416 1417 1418 1419 1420 1421 1422 1423 1424 1425 1426 1427 1428 1429 1430 1431 1432 1433 1434 1435 1436 1437 1438 1439 1440 1441 1442 1443 1444 1445 1446 1447 1448 1449 1450 1451 1452 1453 1454 1455 1456 1457 1458 1459 1460 1461 1462 1463 1464 1465 1466 1467 1468 1469 1470 1471 1472 1473 1474 1475 1476 1477 1478 1479 1480 1481 1482 1483 1484 1485 1486 1487 1488 1489 1490 1491 1492 1493 1494 1495 1496 1497 1498 1499 1500 1501 1502 1503 1504 1505 1506 1507 1508 1509 1510 1511 1512 1513 1514 1515 1516 1517 1518 1519 1520 1521 1522 1523 1524 1525 1526 1527 1528 1529 1530 1531 1532 1533 1534 1535 1536 1537 1538 1539 1540 1541 1542 1543 1544 1545 1546 1547 1548 1549 1550 1551 1552 1553 1554 1555 1556 1557 1558 1559 1560 1561 1562 1563 1564 1565 1566 1567 1568 1569 1570 1571 1572 1573 1574 1575 1576 1577 1578 1579 1580 1581 1582 1583 1584 1585 1586 1587 1588 1589 1590 1591 1592 1593 1594 1595 1596 1597 1598 1599 1600 1601 1602 1603 1604 1605 1606 1607 1608 1609 1610 1611 1612 1613 1614 1615 1616 1617 1618 1619 1620 1621 1622 1623 1624 1625 1626 1627 1628 1629 1630 1631 1632 1633 1634 1635 1636 1637 1638 1639 1640 1641 1642 1643 1644 1645 1646 1647 1648 1649 1650 1651 1652 1653 1654 1655 1656 1657 1658 1659 1660 1661 1662 1663 1664 1665 1666 1667 1668 1669 1670 1671 1672 1673 1674 1675 1676 1677 1678 1679 1680 1681 1682 1683 1684 1685 1686 1687 1688 1689 1690 1691 1692 1693 1694 1695 1696 1697 1698 1699 1700 1701 1702 1703 1704 1705 1706 1707 1708 1709 1710 1711 1712 1713 1714 1715 1716 1717 1718 1719 1720 1721 1722 1723 1724 1725 1726 1727 1728 1729 1730 1731 1732 1733 1734 1735 1736 1737 1738 1739 1740 1741 1742 1743 1744 1745 1746 1747 1748 1749 1750 1751 1752 1753 1754 1755 1756 1757 1758 1759 1760 1761 1762 1763 1764 1765 1766 1767 1768 1769 1770 1771 1772 1773 1774 1775 1776 1777 1778 1779 1780 1781 1782 1783 1784 1785 1786 1787 1788 1789 1790 1791 1792 1793 1794 1795 1796 1797 1798 1799 1800 1801 1802 1803 1804 1805 1806 1807 1808 1809 1810 1811 1812 1813 1814 1815 1816 1817 1818 1819 1820 1821 1822 1823 1824 1825 1826 1827 1828 1829 1830 1831 1832 1833 1834 1835 1836 1837 1838 1839 1840 1841 1842 1843 1844 1845 1846 1847 1848 1849 1850 1851 1852 1853 1854 1855 1856 1857 1858 1859 1860 1861 1862 1863 1864 1865 1866 1867 1868 1869 1870 1871 1872 1873 1874 1875 1876 1877 1878 1879 1880 1881 1882 1883 1884 1885 1886 1887 1888 1889 1890 1891 1892 1893 1894 1895 1896 1897 1898 1899 1900 1901 1902 1903 1904 1905 1906 1907 1908 1909 1910 1911 1912 1913 1914 1915 1916 1917 1918 1919 1920 1921 1922 1923 1924 1925 1926 1927 1928 1929 1930 1931 1932 1933 1934 1935 1936 1937 1938 1939 1940 1941 1942 1943 1944 1945 1946 1947 1948 1949 1950 1951 1952 1953 1954 1955 1956 1957 1958 1959 1960 1961 1962 1963 1964 1965 1966 1967 1968 1969 1970 1971 1972 1973 1974 1975 1976 1977 1978 1979 1980 1981 1982 1983 1984 1985 1986 1987 1988 1989 1990 1991 1992 1993 1994 1995 1996 1997 1998 1999 2000 2001 2002 2003 2004 2005 2006 2007 2008 2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019 2020 2021 2022 2023 2024 2025 2026 2027 2028 2029 2030 2031 2032 2033 2034 2035 2036 2037 2038 2039 2040 2041 2042 2043 2044 2045 2046 2047 2048 2049 2050 2051 2052 2053 2054 2055 2056 2057 2058 2059 2060 2061 2062 2063 2064 2065 2066 2067 2068 2069 2070 2071 2072 2073 2074 2075 2076 2077 2078 2079 2080 2081 2082 2083 2084 2085 2086 2087 2088 2089 2090 2091 2092 2093 2094 2095 2096 2097 2098 2099 2100 2101 2102 2103 2104 2105 2106 2107 2108 2109 2110 2111 2112 2113 2114 2115 2116 2117 2118 2119 2120 2121 2122 2123 2124 2125 2126 2127 2128 2129 2130 2131 2132 2133 2134 2135 2136 2137 2138 2139 2140 2141 2142 2143 2144 2145 2146 2147 2148 2149 2150 2151 2152 2153 2154 2155 2156 2157 2158 2159 2160 2161 2162 2163 2164 2165 2166 2167 2168 2169 2170 2171 2172 2173 2174 2175 2176 2177 2178 2179 2180 2181 2182 2183 2184 2185 2186 2187 2188 2189 2190 2191 2192 2193 2194 2195 2196 2197 2198 2199 2200 2201 2202 2203 2204 2205 2206 2207 2208 2209 2210 2211 2212 2213 2214 2215 2216 2217 2218 2219 2220 2221 2222 2223 2224 2225 2226 2227 2228 2229 2230 2231 2232 2233 2234 2235 2236 2237 2238 2239 2240 2241 2242 2243 2244 2245 2246 2247 2248 2249 2250 2251 2252 2253 2254 2255 2256 2257 2258 2259 2260 2261 2262 2263 2264 2265 2266 2267 2268 2269 2270 2271 2272 2273 2274 2275 2276 2277 2278 2279 2280 2281 2282 2283 2284 2285 2286 2287 2288 2289 2290 2291 2292 2293 2294 2295 2296 2297 2298 2299 2300 2301 2302 2303 2304 2305 2306 2307 2308 2309 2310 2311 2312 2313 2314 2315 2316 2317 2318 2319 2320 2321 2322 2323 2324 2325 2326 2327 2328 2329 2330 2331 2332 2333 2334 2335 2336 2337 2338 2339 2340 2341 2342 2343 2344 2345 2346 2347 2348 2349 2350 2351 2352 2353 2354 2355 2356 2357 2358 2359 2360 2361 2362 2363 2364 2365 2366 2367 2368 2369 2370 2371 2372 2373 2374 2375 2376 2377 2378 2379 2380 2381 2382 2383 2384 2385 2386 2387 2388 2389 2390 2391 2392 2393 2394 2395 2396 2397 2398 2399 2400 2401 2402 2403 2404 2405 2406 2407 2408 2409 2410 2411 2412 2413 2414 2415 2416 2417 2418 2419 2420 2421 2422 2423 2424 2425 2426 2427 2428 2429 2430 2431 2432 2433 2434 2435 2436 2437 2438 2439 2440 2441 2442 2443 2444 2445 2446 2447 2448 2449 2450 2451 2452 2453 2454 2455 2456 2457 2458 2459 2460 2461 2462 2463 2464 2465 2466 2467 2468 2469 2470 2471 2472 2473 2474 2475 2476 2477 2478 2479 2480 2481 2482 2483 2484 2485 2486 2487 2488 2489 2490 2491 2492 2493 2494 2495 2496 2497 2498 2499 2500 2501 2502 2503 2504 2505 2506 2507 2508 2509 2510 2511 2512 2513 2514 2515 2516 2517 2518 2519 2520 2521 2522 2523 2524 2525 2526 2527 2528 2529 2530 2531 2532 2533 2534 2535 2536 2537 2538 2539 2540 2541 2542 2543 2544 2545 2546 2547 2548 2549 2550 2551 2552 2553 2554 2555 2556 2557 2558 2559 2560 2561 2562 2563 2564 2565 2566 2567 2568 2569 2570 2571 2572 2573 2574 2575 2576 2577 2578 2579 2580 2581 2582 2583 2584 2585 2586 2587 2588 2589 2590 2591 2592 2593 2594 2595 2596 2597 2598 2599 2600 2601 2602 2603 2604 2605 2606 2607 2608 2609 2610 2611 2612 2613 2614 2615 2616 2617 2618 2619 2620 2621 2622 2623 2624 2625 2626 2627 2628 2629 2630 2631 2632 2633 2634 2635 2636 2637 2638 2639 2640 2641 2642 2643 2644 2645 2646 2647 2648 2649 2650 2651 2652 2653 2654 2655 2656 2657 265

付録Ⅱ 本文(4-12)式の導出

本文(4-2)式を次のように部分分数に展開し考える。

$$G_{\alpha}(z) = \frac{\beta_3}{(1-\beta_1 z^{-1})} - \frac{\beta_3}{(1-\beta_2 z^{-1})} \quad (\text{II-1})$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし, } \alpha_1 &= -(\beta_1 + \beta_2) \\ \alpha_2 &= \beta_1 \cdot \beta_2 \\ \alpha_3 &= \beta_3 \cdot (\beta_1 - \beta_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-2})$$

(II-1)式を z^{-1} について展開し、 z^{-k} の係数と本文(4-1)式と比較して、

$$\beta_3 \cdot (\beta_1^k - \beta_2^k) = g_k \quad (\text{II-3})$$

さらに、 z^{-2k} の係数と比較して、

$$\beta_3 \cdot (\beta_1^{2k} - \beta_2^{2k}) = g_{2k} \quad (\text{II-4})$$

変形して、

$$\beta_3 \cdot (\beta_1^k - \beta_2^k) \cdot (\beta_1^k + \beta_2^k) = g_{2k} \quad (\text{II-4})'$$

また、(II-3)式の両辺に β_1 を乗じて整理すると、

$$\beta_3 \cdot (\beta_1 - \beta_2) \cdot (\beta_1^k + \beta_1^{k-1} \cdot \beta_2 + \dots + \beta_1 \cdot \beta_2^{k-1}) = \beta_1 \cdot g_k \quad (\text{II-5})$$

(II-3)式において、 $k \rightarrow k+1$ としたものと (II-5)式より、

$$g_{k+1} - \beta_1 \cdot g_k = \beta_3 \cdot (\beta_1 - \beta_2) \cdot \beta_2^k \quad (\text{II-6})$$

また、 β_2 を用い同様にして、

$$g_{k+1} - \beta_2 \cdot g_k = \beta_3 \cdot (\beta_1 - \beta_2) \cdot \beta_1^k \quad (\text{II-7})$$

(II-6), (II-7) 式より,

$$2 \cdot g_{k+1} - (\beta_1 + \beta_2) \cdot g_k = \beta_3 \cdot (\beta_1 - \beta_2) \cdot (\beta_1^k + \beta_2^k) \quad (\text{II-8})$$

(II-2) 式も考慮して整理すると,

$$2 \cdot g_{k+1} + \alpha_1 \cdot g_k = \alpha_3 \cdot (\beta_1^k + \beta_2^k) \quad (\text{II-9})$$

(II-3), (II-4), (II-9) 式より,

$$g_k \cdot (2g_{k+1} + \alpha_1 g_k) = \alpha_3 \cdot g_{2k}$$

これを整理して,

$$g_{2k} \cdot \alpha_3 - g_k^2 \cdot \alpha_1 - 2 \cdot g_k \cdot g_{k+1} = 0 \quad (\text{II-10})$$

これが 本文 (4-12) 式である。

付録Ⅲ 本文(4-16)式の導出

本文(4-12)式の導出(付録Ⅱ)と同様の考え方で、(4-2)式と(Ⅱ-1)、
(Ⅱ-2)式のように展開し、(Ⅱ-1)～(Ⅱ-10)式の他に、さらにつぎに示す
5 (Ⅲ-1)式を考へる。

$$\begin{aligned} g_{3k} &= \beta_3 \cdot (\beta_1^{3k} - \beta_2^{3k}) \\ &= \beta_3 \cdot (\beta_1^k - \beta_2^k) \{ (\beta_1^k + \beta_2^k) - \beta_1^k \beta_2^k \} \end{aligned} \quad (\text{Ⅲ-1})$$

10 と同様、(Ⅱ-2)、(Ⅱ-6)式と(Ⅱ-2)、(Ⅱ-7)式よりそれぞれ、

$$\beta_2^k = \frac{1}{\alpha_3} \cdot (g_{k+1} - \beta_1 \cdot g_k) \quad (\text{Ⅲ-2})$$

$$\beta_1^k = \frac{1}{\alpha_3} \cdot (g_{k+1} - \beta_2 \cdot g_k) \quad (\text{Ⅲ-3})$$

15 (Ⅲ-2)、(Ⅲ-3)式より、(Ⅱ-2)式を考慮して、

$$\beta_1^k \beta_2^k = \frac{1}{\alpha_3^2} \cdot \{ g_{k+1}^2 + g_k (\alpha_1 \cdot g_{k+1} + \alpha_2 \cdot g_k) \} \quad (\text{Ⅲ-4})$$

20 また、(Ⅱ-3)、(Ⅱ-4)'式より、

$$(\beta_1^k + \beta_2^k)^2 = (g_{2k}/g_k)^2 \quad (\text{Ⅲ-5})$$

本文(4-13)式を考慮して、(Ⅱ-3)、(Ⅲ-4)、(Ⅲ-5)式と(Ⅲ-1)式に代入して、

$$25 \quad g_{3k} = g_k \cdot \left\{ (g_{2k}/g_k)^2 - \frac{1}{\alpha_3^2} \cdot (g_{k+1}^2 - g_k \cdot g_{k+2}) \right\}$$

これを變形して次式を得る。この両辺の平方根をとったものが本文(4-16)式である。

$$30 \quad \alpha_3^2 = \frac{g_k^2 (g_{k+1}^2 - g_k \cdot g_{k+2})}{(g_{2k}^2 - g_k \cdot g_{3k})} \quad (\text{Ⅲ-6})$$

付録Ⅳ 伝達関数が与えられている時、これを Jordan

Canonical Form に変換し、離散値系の状態方程式表示を行なうこと。

5 伝達関数が (Ⅳ-1) 式で与えられるような簡単な二次系の場合を考える。

$$G(s) = \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)} \quad (Ⅳ-1)$$

10 これを Jordan Canonical Form に変換し、まず、連続系の状態方程式と導く。 (Ⅳ-1) 式と (Ⅳ-2) 式のように変形し、図Ⅳ-1 を参照すると、

$$G(s) = \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2} \quad (Ⅳ-2)$$

$$15 \quad \frac{d}{dt} X(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \quad (Ⅳ-3)$$

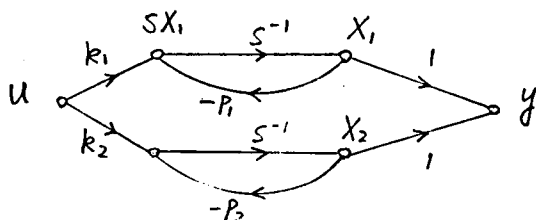
$$Y(t) = C^T \cdot X(t) \quad (Ⅳ-4)$$

が得られる。これより、

$$20 \quad k_1 = K/(p_2 - p_1), \quad k_2 = K/(p_1 - p_2),$$

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 \\ 0 & -p_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad (Ⅳ-5)$$

$$C^T = [1, 1]$$



30 図Ⅳ-1 $G(s) = \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2}$ の信号線図表示

つぎにこれを離散値系の状態方程式表示に変換することを考える。

さて、(IV-3)式の解を求めると、つぎのようになる。

$$X(t) = \Phi(t) \cdot X_0 + \int_0^t \Phi(t-\eta) \cdot b \cdot u(\eta) d\eta \quad (IV-6)$$

ただし、 $\Phi(t)$ は $u(t)=0$ の場合の (IV-3) 式の解を 2 次式で表わされる。

$$\Phi(t) = \exp(A \cdot t) \quad (IV-7)$$

そこで、 $X_k \triangleq X(kT)$ 、 $X_{k+1} \triangleq X((k+1) \cdot T)$ であることと考慮すると、

$$X_{k+1} = \Phi(T) \cdot X_k + \int_0^T \Phi(T-\eta) \cdot b \cdot u(\eta) d\eta \quad (IV-8)$$

(T : サンプルング周期)

よって、(IV-3)、(IV-4) 式に対応する離散値系の状態方程式と出力方程式を (IV-9)、(IV-10) 式と仮定し、その係数マトリックス P 、 q 、 c^T を求める。

$$X_{k+1} = P \cdot X_k + q \cdot u_k \quad (IV-9)$$

$$Y_k = c^T X_k \quad (IV-10)$$

(IV-8)、(IV-9) 式より、たゞちに次式が得られる。

$$\begin{aligned} P &= \Phi(T) = \exp(A \cdot T) \\ &= \begin{bmatrix} e^{-RT} & 0 \\ 0 & e^{-B^2 T} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (IV-11)$$

つぎに、 $kT \leq \eta < (k+1)T$ に対して、 $u(\eta) = u(kT) \triangleq u_k$ と仮定すると、(入力信号が階段状信号であること) 次式が得られる。

$$\int_0^T \Phi(T-\eta) \cdot b \cdot u(\eta) d\eta = \Phi(T) \cdot A^{-1} (I - \Phi(T)^{-1}) \cdot b \cdot u_k \quad (IV-12)$$

より、

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}) \cdot \mathbf{b} \\ &= \frac{K}{P_2 - P_1} \begin{bmatrix} (1 - e^{-P_1 T})/P_1 \\ -(1 - e^{-P_2 T})/P_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (IV-13)$$

なお、 \mathbf{C}^T は連続系も離散値系も同じものになる。

本文の (7-15) 式と合せて、 \mathbf{g} の第 2 要素の負号をとると、 \mathbf{C}^T の第 2 要素に負号がつくことになる。(図 IV-1. 参照)

つぎに本文の (7-13) 式の $(1 - e^{-sT})/s$ は 零次ホールド回路の伝達関数で、 λ を階段状信号にするために挿入されたものであると考えられる。また、 e^{-hs} の項は、 λ を $h = m \cdot T$ 時間だけ遅らせる働きをしているだけであることを考慮すると、 u_k と u_{k-m} に変えればよいことが分かる。

以上のことは 3 次あるいはそれ以上の系についても殆んど同じように出来る。

付録 V 状態変数フィードバックと出力フィードバック

形にするための適当な変換

$$X_k \triangleq \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_k = V \cdot \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}_k \quad (V-1)$$

5 に対し,
$$V = \frac{1}{p_2 - p_1} \begin{bmatrix} p_2 & 1 \\ p_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (V-2)$$

が正しいことを証明する。

まず, $\dot{y}(t)$ と $x(t)$ を用いて表わすと,

10
$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= C^T \cdot X(t) \\ &= C^T \cdot A \cdot X(t) + C^T \cdot B \cdot u(t) \end{aligned} \quad (V-3)$$

ところで, $C^T \cdot B \cdot u(t)$ の項を考慮してみよう。

15
$$C^T \cdot B = (1, -1) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = k_1 - k_2 = 0 \quad (V-4)$$
$$(\because k_1 = k_2 = K/(p_2 - p_1))$$

なお, 高次の系についても同様のことがいえ, $u(t)$ の項は消える。

20 そこで, $\dot{y}(t) = C^T \cdot A \cdot X(t)$ と表わされるので, 次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C^T \cdot X_k \\ C^T \cdot A \cdot X_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T \\ C^T \cdot A \end{bmatrix} \cdot X_k \quad (V-5)$$

25 (したがって, (V-1)式の右)の変換を行なうためのマトリックス V は

$$V = \begin{bmatrix} C^T \\ C^T \cdot A \end{bmatrix}^{-1} \quad (V-6)$$

より求められる。これを, この場合にあてはめると, (V-2)式が得られる。

参考文献

- 1) Kerr, R.B. and Surber, W.H. : "Precision of Impulse-Response Identification Based on Short, Normal Operating Records," IRE Trans., vol. AC-6 , pp. 173-182, 1961
- 5 2) Lichtenberger, W.W. : "A Technique of Linear System Identification Using Correlating Filters," IRE Trans., vol. AC-6 , pp.183-199, 1961
- 3) Lindenlaub, J.C. and Cooper, G.R. : "Noise Limitations of System Identification Techniques," IEEE Trans., vol. AC-8 , pp. 43-48, 1963
- 10 4) Veltman, B.P. und Kwakernaak, H. : "Theorie und Technik der Polaritätskorrelation für die dynamische Analyse nieder-frequenter Signale und Systeme," Regelungstechnik, Heft 9, 357-363, 1961
- 5) Veselova, G.P. and Griбанov, Yu.I. : "The Relay Method of Determining Correlation Coefficients," Automation and Remote Control, vol. 30, no. 2, pp. 187-194, 1969
- 6) Kalman, R.E. : "Design of a Self-Optimizing Control System," ASME Trans., vol. 80, no. 2, pp. 468-478, 1958
- 15 7) Huffman, D.A. : "The Synthesis of Linear Sequential Coding Networks," Information Theory Academic Press, pp. 77-95, 1956
- 8) McFadden, J.A. : "The Axis-Crossing Intervals of Random Functions," IRE Trans., vol. IT-2, pp.146-150, December, 1956
- 9) _____ : "The Axis-Crossing Intervals of Random Functions II," IRE Trans., vol. IT-4, pp.14-24, March, 1958
- 20 10) _____ : "The Fourth Product Moment of Infinitely Clipped Noise," IRE Trans., vol. IT-4, pp. 159-162, December, 1958
- 11) _____ : "The Probability Density of the Output of an RC Filter When the Input Is a Binary Random Process," IRE Trans., vol. IT-5 , pp. 174-178, December, 1959
- 25 12) _____ : "On the Length of Intervals in a Stationary Point Process," Journal of the Royal Statistical Society, Series B, vol.24, no.2, pp. 364-382, 1962
- 13) Wax, N. (editor) : "Selected Papers on Noise and Stochastic Processes," Dover Pub., New York, pp. 133-294, 1954
- 30 14) Davenport, W.B.Jr. and Root, W.L. : "An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise," McGraw-Hill, New York, 1958

- 15) 古田, 伊沢: プロセス動特性の一測定法, 計測と制御,
Vol. 3, No. 9, pp. 666~674, 1964
- 5 16) 佐藤: 線形なプロセスの応答の実時間算定法, 計測と制御,
Vol. 3, No. 9, pp. 675~683, 1964
- 17) 大地, 古田, 伊沢: M系列信号を用いた最適化制御,
計測自動制御学会論文集, Vol. 2, No. 4, pp. 276~282, 1966
- 10 18) 河原田: M系列とノイズと組合わせた高速度二進乱数の
発生, 計測自動制御学会論文集, Vol. 2, No. 4, pp. 283~288,
1966
- 15 19) 伊沢, 古田, 大野, 井藤, 秋山: Binary Random Signal による
熱交換器の動特性試験, 計測自動制御学会論文集, Vol. 2,
No. 2, pp. 101~112, 1966
- 20 20) 前田: 擬定乱信号を用いた最適制御系, 制御工学, Vol. 13,
No. 4, pp. 245~254, 1969
- 21) 藤井, 赤沢: 平均応答計算装置の試作, 制御工学, Vol. 11,
No. 6, pp. 299~307, 1967
- 25 22) 森下: 相関器を簡易化するための新しい方法, 計測と制御,
Vol. 3, No. 4, pp. 282~288, 1964
- 23) 中村, 岩貞, 足立: I系列によるプラント動特性の同定法,
計測自動制御学会論文集, Vol. 5, No. 2, pp. 118~126, 1969
- 30 24) 鈴木, 藤井: プロセス同定問題への最小2乗推定法の応用, 計測
と制御, Vol. 10, No. 8, pp. 563~578, 1971

- 25) 鈴木, 峠, 藤井, 西村: 最小2乗法による線形プロセスの動特性決定法について, 計測自動制御学会論文集, Vol. 1, No. 2, pp. 163~173, 1965
- 5 26) 鈴木, 古谷, 藤井: 最小2乗法による無定位性プロセスの動特性決定, 計測自動制御学会論文集, Vol. 2, No. 4, pp. 289~294, 1966
- 10 27) 茅: 相関関数解析とそのプロセス動特性計測への応用, 計測と制御, Vol. 5, No. 2, pp. 121~128, 1966
- 28) 茅: 相関を利用した周波数応答測定法, 計測と制御, Vol. 2, No. 1, pp. 33~40, 1963
- 15 29) 茅: 伝達関数モデル妥当性の検定, 計測自動制御学会論文集, Vol. 5, No. 4, pp. 348~357, 1969
- 30) 茅: プロセス伝達関数の比較解析, 電気学会誌, Vol. 90, No. 6, pp. 183~192, 1970
- 20 31) 榎木, 菅井: 制御系における Random Signal の相関関数決定に際しての誤差の評価, 京都大学自動制御研究会資料,
- 25 32) 兼田: 零交叉波を用いた相関関数の測定について, 京都大学工学部電気系教室研究談話会資料, No. 174, 1968
- 33) 近藤, 安藤, 兼田, 森本: 2値遅延装置の試作とアナログ相関器への応用, アナログ技術研究会資料, Vol. 8, No. 2, pp. 37~46, 1968
- 30 34) 佐藤: 確率的非線形系の解析 — ランダム・プロセスの非線形確率の一例 —, 計測と制御, Vol. 5, No. 3, pp. 155~160, 1966

- 35) 近藤, 安藤, 兼田, 森本: 磁歪遅延線を用いた多出力可変遅延装置について, 日本自動制御協会 統計学的制御理論シンポジウム資料, No. 205, pp. 53-58, 1968
- 5 36) 兼田, 安藤, 近藤: 2値信号の多出力可変遅延装置, 制御工学, vol. 14, No. 7, 1970
- 10 37) 兼田, 安藤: ノイズのあるインパルス応答のサンプル値より等価的二次系の伝達関数を推定する方法, 電子通信学会論文誌, vol. 54-C, No. 12, pp. 1168, 1971
- 38) 兼田: インパルス応答を用いた動特性推定, 電子通信学会論文誌, vol. 55-D, No. 7, pp. 481, 1972
- 15 39) 兼田, 安藤: ノイズのあるインパルス応答より等価的二次系の伝達関数を推定する方法, 日本自動制御協会 第4回統計学的制御理論シンポジウム資料, No. 4.2, pp. 37-40, 1971
- 20 40) 兼田: パラメータ推定における準最適重みに関する一考察, 電子通信学会論文誌, vol. 55-D, No. 8, pp. 563, 1972
- 41) 兼田, 安藤: 線形離散値系の動特性同定, 日本自動制御協会 第2回ダイナミカル・システム・シンポジウム資料, No. 122, pp. 73-76, 1972
- 25 42) Laning, J.H.Jr. and Battin, R.H.: "Random Processes in Automatic Control," McGraw-Hill, New York, 1956
- 43) Korn, G.A.: "Random-Process Simulation and Measurement," McGraw-Hill, New York, 1966
- 44) Pervozvanskii, A.A.: "Random-Processes in Nonlinear Control Systems," Academic Press, New York, pp. 16-43, 1965
- 30 45) Uhlenbeck, G.E. and Lawson, J.L.: "Threshold Signals," Radiation Laboratory Series, McGraw-Hill, New York, 1950

- 46) Hargrave, L.E.Jr. : "A Magnetostrictive Delay-Line Shift Register," IRE Trans., vol. EC-10, December, pp. 702-707, 1961
- 47) Mundy, R.C.N. : "A Magnetostrictive Delay-Line Store," Electronic Engineering, vol. 35, January, pp. 32-35, 1963
- 5 48) Lee, P.C.K. : "Optimal Estimation, Identification, and Control," MIT Press, 1964
- 49) Tou, J.T. : "Digital Sampled-Data Control System," McGraw-Hill, New York, 1959
- 50) Joshi, S. and Kaufman, H. : "An Adaptive Control Scheme for High Order Plants Using Second Order Models with Transport Lag," Research Report of U.S. Armed Service Technical Information Agency, 1971
- 10 51) Cox, J.B., Hellums, L.J., and Williams, T.J. : "Algorithms for Direct Digital Control of Chemical Processes," IFAC, Session 4B, Paper 43A, 1966
- 52) Gallier, F.W. and Otto, R.E. : "Self-Tuning Computer Adapts DDC Algorithms," Progress in Direct Digital Control, ISA 1969, edited by Williams, T.J. and Ryan, F.M., pp. 235-240, 1969
- 15 53) Coughapour, D.R. and Koppel, L.B. : "Process Systems Analysis and Control," McGraw-Hill, New York, p.97, pp. 225-226, 1965
- 54) Jazwinski, A.H. : "Stochastic Processes and Filtering Theory," Academic Press, New York, 1970
- 20 55) Sage, A.P. : "Optimum Systems Control," Prentice-Hall Inc., 1968